Philos.
2328
(2

Staatl. Bibliothek
Regensburg

Philos. 2328

Ausführliche Anweisung
zum
Rechenunterrichte
in
Volksschulen
nach
der bildenden Methode

von
D. Heinrich Stephani,
königl. baierischen Kreis- Schul- und Kirchen-Rathe, des königl. Hausordens vom H. Michael Ehrenritter, und mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede.

Zweiter Kursus: die Zifferrechenkunst.

Nürnberg,
bei Riegel und Wießner.
1817.

K. KREISBIBLIOTHEK REGENSBURG

Vorrede.

Die bildende Lehrweise verfolgt auch bei diesem zweiten Kursus des Denkrechnens für Volksschulen ihren einfachen, naturgemäßen, und eben deßwegen sicher zum Ziele führenden Gang.

Die Menschenkraft, welche im ersten Kursus sich an der Zahl bereits zu einer hohen Stufe entwickelt hat, soll nun sich mit dem Stellvertreter der Zahl, mit der Ziffer befassen, um theils durch Hülfe derselben ihre gewonnene Herrschaft in diesem Reiche innerer Anschauung durch Wiederholung ihrer Verfahrungsweise vester zu gründen, theils das Gebieth derselben durch Beiziehung größerer Zahlmassen und schwieriger Aufgaben selbst noch um vieles zu erweitern.

Der hierbei einzuhaltende Stufengang mußte derselbe, wie bei dem ersten Kursus seyn, weil der Lehrstoff im Grunde ganz der nähmliche bleibt, und der natürliche Weg niemahls

von der einfachen, gerade zu dem Zwecke führenden Linie abweicht. Man wird daher bei dem gegenwärtigen zweiten Kursus nur zwei Veränderungen wahrnehmen, die erste besteht darin, daß an die Stelle der ersten Vorübung der Zahlenrechenkunst, des Zahlordnens, hier die Zahlschreibe und Zahllesekunst aus leicht begreiflicher Ursache tritt, weil bei der Zifferrechenkunst von dieser, auf den Grund jener fortbauend, nothwendig ausgegangen werden muß. Die zweite Abänderung betrifft die schließende Rechnungsart, welche hier erst an die Reihe kommt, nachdem die einfache verbindende und trennende Rechnungsart sowohl mit ganzen als mit Theilzahlen an Ziffern genugsam eingeübt worden ist. Da jener hier weitere Grenzen eingeräumt werden mußten, so konnte sie auch nicht auf ganze Zahlen beschränkt werden, und mußte daher nothwendig ihre Stellung auf der Schlußstufe des Ganzen finden.

Bei dem unverrückt im Auge behaltenen Zwecke, die Menschenkraft unserer Volksschüler in den Mittelklassen an diesem Lehrstoffe auf eine selbstthätige Weise zu entfalten, sah ich überall zuvörderst darauf, ein Bewußt-

seyn

seyn ihres eigentlichen Thuns bey jeder Aufgabe zu erzeugen, weil eben hierin die dem Menschen eigenthümliche Selbstthätigkeit besteht, welcher das besonnenheitslose, thierische, mechanische Handeln gegen über steht. Je mehr Lehrer und Schüler zu jenem gebracht werden können, um so sicherer wird der Lehrmechanismus aus den Schulen verschwinden, und die nur allein wahres, menschliches, Leben bringende Lehrweise, die bildende, daselbst herrschend werden. Tiefer sehenden Lehrern wird es nicht entgehen, daß dieses Prinzip sich beim Schlußrechnen selbst an die Lehre von den Proporzionen wagte, und die auch hier aufgeschlagene, selbst von manchem Mathematiker unbewußter Weise in Schutz genommene Herrschaft des Mechanismus dadurch zertrümmerte, daß hier dem Bewußtseyn klar vorgewiesen wird, warum dieß Verhältniß der verschiedenen Glieder eines Zahlenschlusses Statt finden müsse, und es daher gar nicht nöthig sey, hier blindlings etwas als Grundregel seines weitern bloß mechanischen Verfahrens anzunehmen.

Uebrigens bemerke ich noch, daß ich meinen Zweck nicht weiter verfolgte, als es nöthig war, und daher diesen Unterrichtszweig genau

auf

auf die Grenzen beschränkte, die ihm in Volksschulen vorgezeichnet werden müssen, wenn man aus Vorliebe zu dem bearbeiteten Lehrstoffe nicht in Gefahr kommen will, des Guten zu viel zu thun, was besonders dann der Fall ist, wenn man die Ueberzeugung haben kann, auf dem eingeschlagenen Wege in kürzerer Zeit ungleich mehr als auf dem bisher betretenen zu leisten.

Daß man die Volksjugend gar leicht in einem Lehrfache zu weit bilden könne, scheint von manchem Lehrer noch nicht gehörig bedacht worden zu seyn, daher es nicht ganz unverdienstlich seyn dürfte, hierauf gerade bei einem Fache aufmerksam zu machen, wo man in unsern Tagen aus heiligem (wo nicht blinden) Eifer durch das Zuviele wieder auszugleichen sucht, was dafür in den vorigen Zeiten zu wenig in Volksschulen geschah.

Man kann bei dem Rechenunterrichte der Jugend in formeller und materieller Hinsicht Schaden thun, wenn man solchen über die Grenzen hinausführet, welche ihm von der Bestimmung der Volksschulen und der hierbei zu Gebothe stehenden Zeit vorgeschrieben werden.

Die Hauptkräfte des Menschen sollen hier

für

für den Zweck seines Daseins auf eine harmonische Weise grundhaltig ausgebildet werden. Keiner Kraft soll in der Regel so vieler Fleiß gewidmet werden, daß sie das Uebergewicht über die andern erhält. Am wenigsten darf dieß der Fall bei der Zahlkraft seyn, weil hierdurch das Denkvermögen die Richtung erhält, Alles nur unter der Form der innern Anschauung aufzufassen. Wollen wir aber die Hauptkräfte des Menschen nach ihrem Verhältnisse zu seiner Bestimmung ja abstufen, und für diejenigen ein grösseres Maß von Uebung fordern, welchen in dieser Hinsicht ein Vorzug gebührt, so kann dieß nur die Vernunftkraft seyn, durch welche der Mensch sich für die moralische Welt entfaltet. Und doch ist auch selbst hierbei ein Uebermaß nicht ohne Nachtheil für die allgemeine Menschenbildung.

Endlich ist uns ja zu dieser Grundbildung des Menschen in unsern Volksschulen eine bestimmte Zeit zugemessen, mit welcher wir sehr haushältig umgehen müssen, wenn sie uns zulangen soll, um allen gerechten Forderungen zu entsprechen. So bald wir davon zu viel auf Einen Lehrgegenstand verwenden, geschieht dieß immer auf Kosten der übrigen. Und darunter

ter sind denn doch so manche, welche in manchem Betrachte vor der Zahl selbst den Vorzug verdienen, wovon ich hier Sprache, Mensch und Natur nennen will, deren Wichtigkeit für Menschenbildung selbst von vielen Lehrern noch nicht geahnet wird, weil sie in das innere Wesen dieser Lehrfächer noch nicht eingedrungen sind, sondern noch mit dem Zeitalter bloß an deren Aussenseite hängen.

Lassen wir uns mithin damit in den Volksschulen begnügen, daß wir hier zur einstimmigen Bildung des Menschen für den großen Gesammtzweck seines Daseyns einen sichern Grund legen, auf welchem in den künftigen speziellen Lehrlingsverhältnissen dasselbe weiter fortgebaut werden kann: Hier wird er sich um so leichter auch die Zahlkraft in jenem gesteigertem Maße erwerben, wie er solcher für seine besondere bürgerliche Bestimmung in der Folge bedarf. *)

Nach

*) Hier ist vielleicht kein unschicklicher Ort, auf die Nothwendigkeit hinzuweisen, in allen Lehrfächern der allgemeinen Vorbildungs- oder Volksschulen, von solchen Anfangsgründen auszugehen, auf welchen in den speziellen Schulen nur weiter fortgebaut werden darf. Im ganzen Systeme der öffentlichen Erziehung muß durchaus Einklang gefunden werden.

Nach diesem Vorworte empfehle ich auch diesen weitern Beitrag zur Begründung einer durchaus einfachen und zweckmäßigen Lehrweise in Volksschulen allen jenen ädlern Männern meiner Nation, die meine bildende Lehrweise mit Wohlwollen aufgenommen, und sie mit verdienstvollem Eifer bereits im Vaterlande so weit ausgebreitet haben, daß jetzt schon an der von mir beabsichtigten Verbannung der mechanischen Unterrichtsweisen durch ganz Deutschland nicht mehr zu zweifeln ist.

In diesem belohnenden Erfolge finde ich Ermunterung genug, jede einzelne Stunde meiner Muße auf die Bearbeitung der noch übrigen Methodenbücher zu verwenden, um hierdurch eine in allen Theilen vollendete Bildung unserer Nazionaljugend nach jenem Ideale zu begründen, das meinem Gemüthe nun schon seit fünf und zwanzig Jahren aufs Lebendigste vorschwebt.

Dabei rechne ich auch auf den Eifer aller jener Lehrer, welche Sinn für den großen Beruf haben, wahre Bildner der Nationaljugend zu werden, und dadurch einen sichern Grund zum Heil der Nachwelt zu legen. Möge es ihnen nicht an muthiger Entschlossenheit fehlen, sich von der an-

angewohnten mechanischen Lehrweise vollends loszureissen! Denn nur mit diesem Hindernisse hat hat die bildende Methode allenthalben zu kämpfen, die an sich so leicht ist, und mit den glücklichsten Erfolge alle ihre Anhänger sogleich nach den ersten Versuchen belohnt. —

Auch bei diesem zweiten Kursus des Rechenunterrichts werden sie wohlthun, wenn sie sich, wie bei dem ersten, einen Zeitplan entwerfen, um ihn in einem Jahrgange mit ihren sämmtlichen Schülern der Mittelklasse zu vollenden. Im zweiten Jahre findet dann eine bloße Wiederholung desselben Statt, welche jene in der Rechenkunst so bevestigen wird, daß sie dann beim Uebergange in die obere Klasse ihre hierdurch gewonnene Zahlkraft mit Leichtigkeit auf die bürgerliche Rechenkunst werden anwenden lernen. Die Anweisung zu diesem leztern Kursus hoffe ich noch im Laufe dieses Jahres zu liefern, und damit das Ganze der Zahlkunde für Volksschulen zu beschließen.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung: vom Zifferrechnen überhaupt. §. 1.
Eigentliche Aufgabe bei der Zifferrechenkunst §. 2.
Methode. §. 3.

I. Grundübungen: A vom Schreiben und Lesen

α. ganzer Zahlen.
Kurze Wiederholung des Dezimal-Systems §. 4.
Versinnlichung des Dezimal-Systems durch Fächer. §. 5.
Gebrauch dieses Versinnlichungs-Mittels. §. 6. 7.
Von den Ziffern oder Zahlbuchstaben. §. 8.
Aufgaben zum Zahlenschreiben:
a. mit Zahlen aus den beiden ersten Ordnungen. §. 9.
b. mit Zahlen aus der dritten Ordnung. §. 10.
c. mit Zahlen der vierten Ordnung. §. 11.
d. mit Zahlen der beiden folgenden Ordnungen. §. 12.
e. mit Zahlen der übrigen Ordnungen. §. 13.

β. Vom Schreiben und Lesen der Theilzahlen.
Vorbemerkung. §. 14.

Ver-

Verschiedene Art, die Theilzahlen zu schreiben. §. 15.
Vom Schreiben doppelter Theilzahlen. §. 16.

B. Ponderiren mit Ziffern.

Allgemeine Vorbemerkung. §. 17.
Stufengang des Ponderirens mit Ziffern. §. 18. und 19.

II. Vom Addiren und Multipliciren mit Ziffern.

1) Vom Addiren überhaupt. §. 20.
a) Aufgaben zur Erlernung des Addirens nach erster Art. §. 21. und 22.
b) Aufgaben zur Erlernung des richtigen Ansatzes nach zweiter Art. §. 23.
c) Leichte Aufgaben zur ersten Einübung des Zusammenzählens. §. 24.
d) Aufgaben von Zahlen einer Ordnung, welche mehr als 9 zusammen betragen. §. 25.
e) Aufgaben zum richtigen Zusammenzählen der einzelnen Zahlen. §. 26.
f) Einige Aufgaben mit genannten Zahlen. §. 27.

2) Vom Multipliziren überhaupt. §. 28.
a. Ansatz und Verfahrungsweise bei größern Hauptzahlen und einer einfachen Vervielfältigungszahl
α. wenn die einzelnen Reihen der Hauptzahlen die Summe von 9 nicht übersteigen. §. 29.
β. wenn sie solche übersteigen. §. 30.
b. Ansatz- und Verfahrungsweise bei mehrfachen Vervielfältigungszahlen. §. 31.

An-

c. Ansatz und Verfahrungsweise, wenn in der Aufgabe Keiner vorkommen. §. 32.
d. Von einigen Erleichterungsmitteln beim Multipliziren. §. 33.
e. Die Verfertigung des Einmahleins. §. 34.
f) Einige Aufgaben mit benannten Zahlen. §. 35.

III. Vom Subtrahiren und Dividiren mit Ziffern.
1. Vom Subtrahiren überhaupt. §. 36.
a. Von Abzugszahlen, welche größer sind als die Theile der Hauptzahl von gleicher Ordnung. §. 37.
b. Aufgaben mit benannten Zahlen. §. 38.
c. Proberechnungsweise. §. 39.
2. Vom Dividiren überhaupt. §. 40.
a. Ansatz- und Verfahrungsweise beim Dividiren. §. 41.
b. Aufgaben mit unbenannten Zahlen. §. 42.
c. Aufgaben mit Theilern, an deren Ende sich Keiner befinden. §. 43.
d. Aufgaben, deren Theilungszahlen und Theiler zugleich Keiner am Ende haben. §. 44.
e. Proberechnungsweise. §. 45.
f. Erleichterungsweise beim Dividiren. §. 46.
g. Aufgaben mit benannten Zahlen. §. 47.
h. Schlußbemerkung über das Dividiren. §. 48.

IV. Vom Zifferrechnen mit Theilzahlen.
1. Ponderiren.
a. Von Vergrößerung und Verkleinerung der Theilzahlen. §. 49.

b.

b. Vom Gleichbleiben der Theilzahlen. §. 50.
c. Vom Auffinden der geringsten Benennung einer größern Theilzahl. §. 51. 52.
d. Von Gleichnahmigmachung der Theilzahlen. §. 53.
e. Aufgaben mit 2 ungleichnahmigen Theilzahlen. §. 14.
f. Aufgaben mit 3 ungleichnahmigen Theilzahlen. §. 55.
g. Aufgaben mit mehreren Theilzahlen. §. 56.
h. Abkürzungsmittel durch Zerlegung der Theilganzen. §. 57.

2. Addiren

a. mit gleichnahmigen Theilzahlen. §. 58.
b. mit ungleichnahmigen. §. 59.
c. mit gemischten Zahlen. §. 60.

3. Multiplizіren

a. mit ganzen und Theilzahlen. §. 61.
b. von der hierbei zu gebrauchenden Zerstreuungsweise der Theilzahlen. §. 62.
c. Vom Multiplizіren der Theilzahlen unter sich. §. 63.
d. Mit gemischten Zahlen. §. 64. 65.
e. Abkürzungsmittel dabei. §. 66.

4. Subtrahiren. §. 67.

5. Dividiren

a. mit Zahlen deren Theiler und Theilungszahlen Theilzahlen sind. §. 68.

b. mit gemischten Zahlen. §. 69.
c. mit ganzen Zahlen. §. 70.

V. Von der Regel Detri oder der schließenden Rechnungsart.

1. Vom Schlußrechnen überhaupt.
a. Von der eigentlichen Beschaffenheit desselben. §. 71.
b. Von der dabei vorkommenden doppelten Schlußweise. §. 72.
c. Weitere Folgerungen daraus. §. 73.
d. Hauptverrichtungen beim Schlußrechnen. §. 74.
e. Verschiedene schriftliche Ansatzweise beim Schlußrechnen. §. 75.
f. Abkürzungsweise dabei. §. 76.

2. Vom Schlußrechnen mit ganzen Zahlen.
a. Wenn das erste Glied des Hauptsatzes kleiner ist als das zweite. §. 77.
b. Wenn das dritte Glied kleiner ist als das erste. §. 78.
c. Wenn das zweite Glied kleiner als das erste ist. §. 78.
d. Vermischte Aufgaben. §. 80.
e. Von der dritten, der umgekehrten Schlußart. §. 81.
f. Aufgaben mit verschiedenen benannten Zahlen. §. 82. und 83.

3. Mit Theilzahlen.
a. In einem Gliede. §. 84.
b. In mehreren Gliedern. §. 85.

4)

4. Schlußweise bei mehreren Zahlgliedern als dreien.

a) Wenn die Aufgabe aus 4 Gliedern besteht. §. 86.

b) Wenn sie aus noch mehreren Gliedern besteht. §. 87.

c) Mehrere Aufgaben zur Uebung. §. 88.

d) Noch weitere Ansatzweisen für das Schlußrechnen. §. 89.

e) Schlußbemerkung. §. 90.

Zweiter Kursus

des

Denkrechnens

oder

die Zifferrechenkunst.

Zweiter Kursus des Denkrechnens oder die Zifferrechenkunst.

Einleitung.

§. 1.

Vom Zifferrechnen überhaupt.

Im ersten Kursus des Denkrechnens wurden unsere Schüler unmittelbar mit der Zahl selbst, oder mit der Größe beschäftiget, welche die Eins zum Grundelemente hat, aus welcher ihr Geist schöpferisch oder selbstthätig dieß große Reich innerer Anschauungen erbaute, indem er durch das Hinzuthun des Urelementes immer neue Zahlgrößen erhielt, die er, zur Gründung seiner Verstandesherrschaft über sie, in bestimmte Ordnungen abtheilte. Nun schreiten wir im zweiten Kursus zur Zifferrechenkunst fort, wo wir uns nur mittelbar, vermittelst gewisser Zeichen, der zehn Ziffern oder Zahlbuchstaben, die Zahl-

größen vorstellen. Diese **Ziffern** sind folglich nicht die Zahlen selbst, so wenig als die Buchstaben die Sprachlaute sind, sondern sie dienen nur zu einem Hülfsmittel, bestimmte Zahlgrößen in uns zum Bewußtseyn zu bringen. Die Ziffern, die Bezeichnungsmittel, sind **ausser uns**, die Zahlen, das durch sie Bezeichnete, **in uns**. Auf diese Weise können wir die unsichtbaren letztern durch jene, ihre sichtbaren Stellvertreter, so oft in uns hervorrufen, als wir wollen, vorausgesetzt, daß wir uns bei diesen Zeichen auch die dadurch bezeichneten Größen richtig vorstellen.

Anmerkung. Das Merkwürdigste dabei ist, daß wir nur zehn solcher Zeichen brauchen, um jede beliebige, noch so ungeheure Größe, wie z. B. die Anzahl aller auf der Erde vorhandenen Sandkörner oder Wassertropfen, bestimmt ausdrücken zu können.

§. 2.

Eigentliche Aufgabe bei der Zifferrechenkunst.

Beim Zifferrechnen soll im Grunde unsern Schülern keine neue Kunst gelehret werden, sondern sie sollen die an den Zahlen bereits befähigte Kraft nur auf die Ziffer anwenden und sie eben dadurch zugleich auch weiter steigern lernen. An den durch die Ziffern vor Augen hingestellten Zahlgrößen muß daher der erste Kursus wiederhohlt und dabei darauf gesehen werden, solche Aufgaben beizufügen, wodurch eine höhere Befähigung und Gewandheit erzeugt werden kann. Letztere Absicht ist um so

leichter zu erreichen, als wir an der Ziffer das Mittel besitzen, nicht nur die größten Zahlen, sondern auch eine Menge derselben zugleich vor unsern Augen aufstellen, vesthalten und vergleichen zu können. Bei dem ersten Kursus hingegen mußten wir uns, besonders bei noch zarten Schülern, nur auf solche Zahlengrößen und eine so geringe Menge von Zahlen beschränken, die von ihnen ohne allzugroßen Kraft-Aufwand konnten gedacht und vestgehalten werden.

Anm. Man denke nur z. B. an die erste Rechenspezies, wo wir nur wenige Zahlen angeben durften, deren Summe von den Schülern gesucht werden mußte. Hier beim schriftlichen Rechnen können wir ihnen ganze Seiten von Zahlen in gleicher Absicht aufgeben.

§. 3.

Methode.

Die Methode bleibt aus gleichem Grunde auch beim Zifferrechnen dieselbe, und muß daher durchaus bildend seyn. Selbstthätig müssen hierbei die Schüler die Zahlen durch Ziffern darstellen, sie ordnen, ponderiren und jede Aufgabe der Rechenkunst mit Bewußtseyn ihres Thuns dabei auf das leichteste und zuverläßigste lösen lernen. Aller Mechanismus bleibt auch hier auf immer ausgeschlossen, und die Lehrer müssen sich deswegen hüten, in den alten Fehler zu verfallen, ihren Schülern Rechen-Exempel aufzugeben, die

sie

sie nur nach mechanischen Vorschriften zu fabriziren haben. „Der blinde Mechanismus, sagt ein Rezensent in den Ergänzungs-Blättern der Jenaer Literaturzeitung (1815 n. 39) so schön und richtig, daß ich die Stelle hier ganz beifügen muß, bildet die Schüler nur zu Rechenknechten; deutliche und überzeugende Regeln hingegen zu gründlichen Rechnern, die, wenn sie auch irgend eine Rechnungs-Regel vergessen haben, aus eigenen Kräften im Stande sind, das Verlohrne wieder zu finden."

Anm. Man verwirre unsere Volksschullehrer doch nicht mehr durch die blos witzige, aber keinesweges scharfsinnige Behauptung, daß auch durch die bildende Methode beim Lesen, Schreiben und Rechnen etwas Mechanisches begründet werde. In demselben Sinne könnte man auch von der wahren Tugendübung sagen, daß sie zu etwas Mechanischen im moralischen Handeln führe. Aber diese entfernten Aehnlichkeiten heben den wesentlichen Unterschied zwischen beiden Handlungsweisen nicht auf, und man versündiget sich an der Wahrheit, wenn man Wörter ferner mißbraucht, um die Erkenntniß dieses wichtigen Unterschiedes zu verhindern. Die Leichtigkeit, welche sich die Seele mit ihrem besonnenem Handeln in der moralischen, intellektuellen und physischen Welt durch Uebung erwirbt, kann nicht eins seyn mit jener geistlos erworbenen Fertigkeit, die von ihrem Thun keine Rechenschaft zu geben

ben weiß, und zu deren Bezeichnung nur allein das Wort mechanisch geeignet ist. Wer mechanisch seine Pflicht auszuüben, oder Wörter lesen und schreiben, Rechen-Aufgaben lösen gelernt hat, weiß den Grund seines Thuns nicht anzugeben, wie nur der wahrhaft Gebildete zu thun im Stande ist. Besonnenheit macht allein den wahren Karakter der ächt menschlichen Handlungsweise aus.

I. Grundübungen.

A. Vom Schreiben und Lesen

α. ganzer Zahlen.

§. 4.

Kurze Wiederholung des Dezimal-Systems.

Dem Zahlschreiben muß eine kurze Wiederholung des Dezimalsystems (Zehner-Gebäudes) deswegen vorangeschickt werden, weil dieses demselben zu Grunde liegt, und daher sehr zweckmäßig erscheint, solches den Schülern aufs neue recht gegenwärtig zu machen. Nur darf dabei die Weitläufigkeit nicht statt finden, welche bei dem Numeriren aus guten Gründen angewandt wurde, son-

dern

dern man verfährt dabei auf folgende kurze Weise. Die Schüler werden aufgefordert,

1. anzugeben, wie viele Zahlen die erste Ordnung umfaßt, und in welcher Reihe sie durch das Hinzufügen der Eins als Elementes gebildet werden;

2. Wodurch die zweite Zahlordnung gewonnen und wie dabei verfahren wird. (Die Zehn wird nähmlich zum Elemente erhoben, und nach und nach neun Mahl durch sich selbst bis zu zehn Zehnern oder zu Hundert vergrößert;

3. Wie die dritte und vierte Zahlenordnung durch Erhebung der Hundert und der Tausend zu einem neuen Elemente, auf gleiche Weise schaffend hervorgebracht wird;

4. Welche Bauweise von der vierten Zahlordnung oder den Tausenden eben so wie von den Einern an statt findet. Es werden nähmlich wieder aus der Eins zehn Zahlen gebildet; die zehnfache Eins wird zum neuen Elemente einer zweiten Ordnung; eben so die zehnfache Zehn (das Hundert) zum Elemente der dritten Ordnung; und das zehnfache Hundert zum Elemente der vierten Ordnung erhoben, wodurch einfache, zehnfache, hundertfache und tausendfache Tausender gewonnen werden.

5. Wie endlich von dem Tausend Mahl Tausend oder der Million der Zahlenbau bis zur Billion, Trillion ꝛc. auf gleiche Weise fortgeführt werden muß.

§. 5.

§. 5.

Versinnlichung des Dezimal-Systems durch Fächer.

Zur leichtern Auffassung des richtigen Zahlenschreibens und Zahlenlesens wird es ungemein viel beitragen, wenn man seine Schüler auffordert, diese Ordnungen durch Fächer an der schwarzen Wandtafel (oder auf ihre eigene Steintafel) zu bezeichnen, und dabei von der rechten nach der linken Hand anzufangen. Die Fächer werden durch senkrechte Linien gebildet, je drei davon in größere Abtheilungen gebracht, und mit den nöthigen Zeichen auf folgende Weise versehen:

⹋			|			‡			|			†			|			
Trillion	H	Z	T	H	Z	B	H	Z	T	H	Z	M	H	Z	T	H	Z	Einer

Z bezeichnet das Fach der Zehner (der zehn Mahl Einer); H das Fach der Hunderter (der zehn Mahl Zehn oder Hundert Einer); T bezeichnet Tausend (zehn Mahl zehn Mahl Zehn oder zehn Mahl Hundert oder Tausend Einer); das einfache Kreuz Million (Tausend Mahl Tausend Einer); das doppelte Kreuz Billion (Tausend Mahl Tausend Mahl Tausend Mahl tausend Einer); und das dreifache Trillion (Tausend Mahl Tausend Mahl Tausend Mahl Tausend Mahl tausend Mahl Tausend). Wer will, kann das Fachwerk auch noch verlängern; jedoch glauben wir, daß es hinreicht, den Schülern

lern blos zu sagen, daß dieser Zahlenbau in gleicher Ordnung zu Quatrillionen, Quinquillionen, ja bis zu hundertfältiger Steigerung (Zentrillionen) fortgeführt werden kann; aber unterlassen würde, weil so große Zahlen im gewöhnlichen Leben niemals vorkommen. Dafür gebe sich der Lehrer Mühe, seine Schüler zu einigen Begriffen von der erstaunenswürdigen Menge von Einheiten hinzuleiten, welche diese Zahlgrößen von einer Million, Billion und Trillion schon enthalten. Dazu können folgende Beispiele gebraucht werden: 1) Ein Schüler nimmt ohngefehr 2 Fuß in die Breite ein. Zehn tausend Schüler nebeneinander in einer Reihe gestellt, bilden eine Linie, welche eine deutsche Meile oder zwei Stunden lang ist. Tausend Mahl tausend oder eine Million Schüler in eine Reihe gestellt, würden den Raum von 50 Meilen oder 100 Stunden einnehmen. 2) Eine Billion Pfennige aneinander gelegt, würde eine Reihe von 300,000 Meilen bilden, mithin hinreichen, 60 Mahl damit einen Umkreis um die ganze Erde zu belegen. 3) Wenn man Jemanden eine Billion Gulden mit der Bedingung schenken wollte, daß er solche erst zählen müßte, der würde damit in seinem ganzen Leben fertig werden. Denn wenn er auch 6 Stücke in einer Sekunde oder 360 in einer Minute zählen könnte, und damit Tag und Nacht fortfahren wollte, so würde er dazu 1056 Jahre gebrauchen. 4) Auch hat man berechnet, daß wenn die Erde ganz aus Ackerland bestehen und durchaus mit Gerste besäet würde, sie doch in einem Jahre noch keine Trillion Gerstenkörner tragen könnte.

Anm. Wer will, kann sich nach obigem Fachwerke ohne große Mühe einen Zahlleseкasten verfertigen, um sich hierdurch das Anschreiben und Auslöschen der Zahlen zu ersparen.

§. 6.

Gebrauch dieses Versinnlichungs-Mittels.

Nachdem der Lehrer seine Schüler mit diesem Fachwerke, den aufeinander folgenden Ordnungen und Benennungen derselben vorwärts und rückwärts genugsam bekannt gemacht hat, so nimmt er an demselben nochmals mit ihnen den Zahlenbau kürzlich auf folgende Weise vor.

Lehrer: wenn ihr Eins zu Eins, dann zu Zwei, Drei und so weiter bis zu Acht hinzufügt, so entstehen dadurch die ersten 9 Zahlgrößen, welche man einfache Zahlen nennt. Wer weiß wohl, warum man sie einfache nennt? Aus welchem Elemente entstanden sie? Kinder: aus der Eins. L. Wie oft Fach oder wie man auch sagen kann, wie oft Mahl mußt du Eins zu Eins legen, um die Zahl 3, 4, 5 zu bilden? Wie viel Fach oder viel Mahl Eins ist 6? K. Sechs Fach oder Sechs Mahl Eins. L. Die 9 ersten aus der Eins gebildeten Zahlen bestehen folglich aus lauter? K. Einern. L. und bilden die wievielste Ordnung von Zahlen? K. die erste. L. die wir daher in Gedanken in welches Fach an der Tafel legen wollen? K. in das erste? L. Welchen Namen trägt deswegen auch dieses Fach? K. Den Namen Einer.

L. Wenn

L. Wenn ihr zu der Zahl 9 noch einen Einer hinzufügt, so habt ihr dann einen? K. Zehner. L. Diesen Zehner können wir eben so wieder zu sich selbst legen, wie wir es bei den 9 Zahlen der ersten Ordnung mit der Eins gemacht haben, und dadurch erhalten wir wieder 9 neue Zahlen, welche eine neue Ordnung bilden, aus lauter Zehnern bestehe, und daher heißen? K. Zehner. L. Nennt diese 9 Zehner in der Reihe her, wie sie auf einander folgen. In das wievielste Fach wollt ihr sie in Gedanken jetzt ebenfalls hier an der Tafel legen? Was enthält dieses Fach? Und ist deswegen bezeichnet mit welchen Anfangsbuchstaben? K. mit Z. L. Wißt ihr noch, wie man 2, 3, 4 ꝛc. Zehner noch kürzer nennt? K. Zwanzig, dreißig ꝛc.

L. Wie viel Zehner enthält das zweite Fach? K. Neun Zehner. L. Warum nicht vollends 10 Zehner? K. Weil zehn Zehner Hundert ausmachen; L. und Hundert bildet wieder das Element von welcher Zahlenordnung? K. von der dritten. L. welche folglich enthält? K. Hunderter. L. Wie viele Hunderter enthält dieses dritte Fach wieder? K. Neun. L. Zehn Hunderter machen? K. Tausend. L. Und Tausend ist wieder das Element von welcher Zahlordnung? K. Von der vierten. L. Welche Zahlen enthält diese? K. Tausender. L. Wie viele Tausender enthält dieses vierte Fach wieder? K. Neun. L. Noch Ein Tausend zu neun Tausend hinzugefügt, so haben wir? K. zehn Tausend. L. Und welches die erste Zahl wieder bildet in welchem Fache? K. In dem fünften. L. In welches wir in Gedanken legen

können,

können wie viele Zehntausender? K. Neun. L. Und neun Zehntausender werden ausgesprochen? K. Neunzig tausend. (Und so weiter bis zum neunzehnten Fache der Trillionen).

§. 7.

Fortsetzung.

Man gebe nun den mit dem Zahlenbaue genugsam bekannt gewordenen Schülern auf:

1. In jedes dieser Fächer aufsteigend sich eine beliebige einfache Zahl zu denken, oder wenn sie wollen, auch ihren Namen hineinzuschreiben. Es sey dieß z. B. die Zahl Zwei. In dem ersten Fache bedeutet sie? Zwei Einer; im zweiten, zwei Zehner oder zwanzig Einer; im dritten, zwei Hundert Einer; im vierten, zwei Tausend Einer; im fünften, zwei Zehntausender oder zwanzig Tausend Einer; im sechsten, zwei hundert tausend Einer; im siebenten, zwei tausend Mahl tausend Einer oder kürzer zwei Millionen Einer; im achten zwanzig Millionen Einer; im neunten, zwei Hundert Millionen (nähmlich Einer, welches Wort man wegzulassen pflegt, aber stets darunter zu verstehen hat); im zehnten, zwei tausend Millionen; im eilften, zwanzig tausend Millionen; im zwölften, zwei Hundert tausend Millionen; im dreizehnten, zwei Tausend Mahl tausend Millionen oder zwei Billionen; im vierzehnten, zwanzig Billionen; im funfzehnten, zwei Hundert Billionen; im sechszehnten, zwei Tausend Billionen; im siebzehnten, zwan-

zwanzig Tausend Billionen; im achtzehnten, zwei Hundert Tausend Billionen; und im neunzehnten, zwei Tausend Mahl Tausend Billionen oder kürzer zwei Trillionen.

2. Gehe man die größere Abtheilung des Zahlenbaues in je drei zu einer derselben gehörigen Fächer mit den Schülern durch. Die drei ersten Fächer (die Einer als Grundelement von allen Zahlen, die Zehner und Hunderter) bilden die erste Abtheilung, die Einer schlechtweg genannt; die drei folgenden, die Tausende schlechtweg; die drei folgenden, die Millionen; die drei folgenden, die Tausende von Millionen; u. s. w.

3. Fordere man seine Schüler auf, sich die Plätze der Tausender (der vierte) der Millionen (der 7te) und so immer 3 weiter bis zum neunzehnten der Trillionen wohl einzuprägen.

§. 8.

Von den Ziffern oder Zahlbuchstaben.

Nach obiger Vorbereitung sage man seinen Schülern, daß in Gemäßheit dieser Fach-Eintheilung von ihnen alle Zahlen so ungeheuer groß und vielfältig sie seyn mögen, doch nur mit zehn einfachen Zeichen oder Zahlbuchstaben (Ziffern genannt) geschrieben werden könnten; welche die Menschen hierzu erfunden hätten, und die ihnen zu gleichem Ende jetzt bekannt gemacht würden. Dieses seyen folgende Zeichen mit den ihnen beigefügten Namen:

0 Null oder Keins, 1 Eins, 2 Zwei, 3 Drei, 4 Vier, 5 Fünf, 6 Sechs, 7 Sieben, 8 Acht, 9 Neun.

Zur Erläuterung ist beizufügen, daß 1) die Null (ein lateinischer Name) oder zu deutsch die Keins, in jedes Fach gesetzt werde, für welches keine Zahl genannt wird; 2) die übrigen Ziffern die Bedeutung des Faches annehmen, in welches sie gesetzt wurden; und 3) daß die Schüler nunmehr versuchen sollten, ob es auch ihnen möglich wäre, alle Zahlen damit zu schreiben, welche man ihnen sowohl vorsagen würde, als die sie sich selbst auch unter einander aufgeben könnten.

§. 9.

Aufgaben zum Zahlenschreiben.

a) Mit Zahlen aus den beiden ersten Ordnungen.

1. Ein Einer oder kurzweg Eins; zwei Einer oder kurzweg Zwei; 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Einer oder kurzweg Drei, Vier u. s. w. Null oder kein Einer (Keins).
2. Neun Zehner und kein Einer, oder kurzweg neunzig; acht Zehner — — — — achtzig u. s. w. 70. 60. 50. 40. 30. 20. 10. kein Zehner und kein Einer (00).
3. Ein Zehner u. ein Einer oder kurzweg Eilf;

—	—	zwei	—	—	Zwölf;
—	—	drei	—	—	Dreizehn;
zwei	—	ein	—	—	Ein u. Zwanzig;
—	—	zwei	—	—	Zwei —
drei	—	drei	—	—	Drei u. Dreißig;
vier	—	drei	—	—	Drei u. Vierzig;

fünf

fünf	Zehner und	vier	Einer oder	kurzweg	Vier u. Funfzig;
sechs	—	fünf	—	—	Fünf u. Sechzig;
sieben	—	sechs	—	—	Sechs u Siebenz.
acht	—	sieben	—	—	Sieb. u. Achtzig;
neun	—	acht	—	—	Acht u. Neunzig;
—	—	neun	—	—	Neun u. neunzig.

Anm. 1. Dieser Stufengang ist genau einzuhalten, da die Erfahrung zeigt, wie selten die Schüler der Volksschulen im Zahlschreiben gut bewandert sind, und wie nachtheilig diese Unkunde auf sie bei Erlernung der Rechenkunst wirkt. Dabei unterlasse der Lehrer nicht, sie öfter zu fragen, warum sie die ihnen vorgesagten Zahlen gerade auf diese und keine andere Weise geschrieben haben, um sich der vollen Besonnenheit ihres Thuns zu versichern.

2. Wenn die Schüler eine Reihe solcher Zahlen in obiges Fachwerk, dessen Linien auf der Wandtafel hinabwärts deshalb zu verlängern sind, richtig eingezeichnet haben, so müssen sie hierauf auch angehalten werden, solche sowohl auf vollständige als auch auf abgekürzte Weise zu lesen, ehe man solche wieder weglöscht; welche Bemerkung auch für die folgenden Aufgaben gilt.

3. Hierauf müssen die Schüler angehalten werden, diese Zahlen ohne Hülfe jenes Fachwerkes auf ihre Steinpappe oder Schiefertafeln zu schreiben, wobei ihnen blos gesagt werden darf, der erste Platz von der rechten zur linken Hand bezeichne das Fach der Einer, der zweite das Fach der Zehner u. s. w.

§. 10.

§. 10.

b) Mit Zahlen aus der dritten Ordnung.

1. Ohne Zehner und Einer: ein Hundert, kein Zehner, kein Einer oder kurzweg Hundert; zwei Hundert, u. s. w. bis neun Hundert.
2. Mit Zehnern und ohne Einer: Ein Hundert, zwei Zehner und kein Einer oder kurzweg, ein Hundert und Zwanzig; zwei Hundert und Dreißig; 340. 450. 560. 670. 780. 890. 990.
3. Mit Einern und ohne Zehner: ein Hundert, kein Zehner und ein Einer oder kurzweg, Hundert und Eins; Hundert und zwei; 203. 304. 405. 506. 607. 708. 809. 909. 901.
4. Mit Zehnern und Einern: ein Hundert, ein Zehner und ein Einer oder kurzweg, Hundert und Eilf; Hundert und Zwölf; 213. 314. 415. 516. 617. 718. 819. 911. 821. 922. 929. 732. 643. 754. 565. 476. 387. 193. 999. 888. 222.

§. 11.

c) Mit Zahlen der vierten Ordnung.

1. Ohne Zahlen aus den drei vorhergehenden Ordnungen: ein Tausend, kein Hundert, kein Zehner, kein Einer oder kurzweg, Tausend.

Anm. Wenn die Schüler diese Zahl richtig geschrieben haben, und sie hierauf, nach oben aufgestellter Regel, auch nunmehr lesen müssen, sind sie

anzuhalten, diese Zahlen sowohl kurzweg, als auch so vollständig auszusprechen, wie so eben angegeben wurde.

Zwei Tausend, 3000. 4000. 5000. 6000. 7000. 8000. 9000.

2. Mit Einern: ein Tausend, kein Hundert, kein Zehner und zwei Einer oder kurzweg, Tausend und Zwei; zwei Tausend und Drei; 3004. 4005. 5006. 6007. 7008. 8009. 9001.

3. Mit Einern und Zehnern: drei Tausend, kein Hundert und Eilf oder kurzweg, drei Tausend und Eilf; 4018. 5021. 6032. 7043. 8054. 9065. 3076. 2087. 1099.

4. Ohne Einer: acht Tausend, sieben Hundert und zwanzig; 7350. 6990. 4880. 9990. 1230. 2310. 3120. 1910.

5. Ohne Zehner: vier Tausend, zwei Hundert und acht; 5901. 1301. 2104. 9909. 7702. 2707. 1203. 1101.

Anm. 1. Bei diesen Aufgaben unterlasse man nicht, die Schüler zu fragen, wie viele Zahlenplätze solche einnehmen, aus welchen vier Ordnungen nur allein Zahlen vorkommen, von welchen Ordnungen keine Zahlen genannt werden, wie viele Keiner (oder Nullen) gesetzt werden müssen, und wie die Summen ganz anders lauten würden, wenn man die nicht vorkommenden Ordnungen mit Keinern zu bezeichnen unterlassen wollte. Durch dergleichen Fragen werden sie genöthiget, ihrer Sache vollkommen gewiß zu werden.

2. In gleicher Absicht lasse man auch einige dieser Zahlen rückwärts lesen, z. B. 2104 folglich sagen: 4 Einer, kein Zehner, 1 Hundert 2 Tausend oder vorwärts: 2 Tausend, 1 Hundert, kein Zehner und 4.

3. Endlich gebe man ihnen auf, in Ziffern die stets um das Zehnfache fortschreitende Vermehrung der neun Grundzahlen bis Tausend auf folgende Weise darzustellen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,
100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900,
1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000.

Das Zehnfache von 1 ist 10; von zwei 20 u. s. w. Das Zehnfache von 10 ist 100, das Zehnfache von 100 ist 1000 u. s. w.

§. 12.

d) Mit Zahlen der beiden folgenden Ordnungen.

123,456 ein Hundert zwanzig und drei Tausend, vier Hundert, funfzig und sechs nach der arithmetischen Weise, oder Hundert, drei und zwanzig Tausend, vier Hundert und sechs und funfzig nach der gemeinen Weise gelesen; 231,706. 321,610. 123,400. 123,060. 222,006. 280,321. 208,231. 300,624. 710,720. 308,703. 801,600. 920,070. 199,009. 100,006. 200,018. 300,000. 403,356. 654,321.

Anm. 1. Man gebe den Schülern, wenn sie diese Zahlen ohne Fachwerk schreiben, das im Leben sehr gebräuchliche Hülfsmittel an, den Platz der Tausenden mit einem Striche eben so zu bezeichnen, wie bei obigen Zahlen geschehen ist, und frage sie dabei, wie viele Zahlenplätze nach diesem Striche noch mit Ziffern ausgefüllt werden müssen.

2. Man kann den Schülern zur Erweckung eines größern Eifers auch erlauben, sich der Reihe nach unter einander schwere Zahlen-Aufgaben zum Schreiben aufzugeben.

§. 13.

e) Mit Zahlen der noch übrigen Ordnungen.

Man kann den Denkrechenschülern nun schon zutrauen, daß sie Aufgaben mit Zahlen aus noch höhern Ordnungen ohne Schwierigkeit, selbst ohne Beihülfe des Fachwerkes schreiben werden, wenn man ihnen nur an die Hand giebt, das Wort Tausend jedes Mahl mit einem Striche hinter der betreffenden Ziffer, das Wort tausendmahltausend oder Million mit einem Punkte über der betreffenden Ziffer, das Wort Billion mit zwei Punkten und das Wort Trillion mit drei Punkten zu bezeichnen. Hierauf gebe man ihnen folgende Aufgaben zum Schreiben.

In Paris sollen gegen 50,000 Häuser und über 500,000 Einwohner; in London gegen 130,000 Häuser und

und 700,000 Einwohner, und in Konstantinopel gegen 400,000 Häuser und 1500,000 Einwohner seyn.

In London werden jährlich 90,000 Ochsen und 800,000 Schafe geschlachtet.

In Deutschland sind gegen 2,300 Städte, 82,000 Dörfer, und 27,000,000 Millionen Einwohner.

Für Europa nimmt man 160,000,000 und für die ganze Erde 1,000,000,000 Menschen an.

Ein Kind von 10 Jahren hat erst 3650 Tage, 87,603 Stunden; ein Greis von 100 Jahren 36,500 Tage und 876,025 Stunden gelebt. Das erstere ist erst 315,370,800 Sekunden oder eigentliche Augenblicke alt.

Wenn man die Oberfläche der Erde in lauter Vierecke von 1 Meile (oder 2 Stunden) in die Länge und Breite eintheilen würde, so würde man deren in allen 9,281,919 erhalten, davon würden 6,192,000 solcher Vierecke (Geviertmeilen oder Quadratmeilen) aus Wasser und 3,089,919 aus Land bestehen.

Europa enthält 171,834, Afrika 531,638, Amerika 572,172 und Asien 641,022 Geviertmeilen; Deutschland gegen 11,124.

Die Erde hat 5,400, die Sonne 1,375,000 Meilen im Umfange. Die erstere ist von der letztern 25,000,000 und von dem Hundssterne, dem uns nächsten Sterne 700,000,000,000 Meilen entfernt.

Zwölf Personen, die an einem Tische sitzen, können ihre Stellen 479,001,600 Mahl verändern, ohne daß sie ein Mahl, wie das andere sitzen.

Wenn

Wenn ein Samenkorn fünfzigfältige Frucht trägt, so kann es in 12 Jahren sich auf 244,140,625,000,000, 000,000 Körner vermehren.

Anm. 1. Sollten einige Schüler am Ende zeigen, daß sie noch keine ganz völlige und sichere Bewandheit im Zahlschreiben erlangt haben, so gebe man ihnen auf, für sich hierin Uebungen anzustellen, indem sie zuerst mit Worten, und dann mit Ziffern bald kleinere bald größere Summen niederschreiben.

2. Noch sind auch die Schüler mit der Gewohnheit im bürgerlichen Leben bekannt zu machen, die Tausende blos in Hunderten anzugeben, und statt 2,200 fl. zwei und zwanzig Hundert Gulden zu sagen. Haben sie dieß durch mehrere dergleichen Aufgaben zum Zahlschreiben wohl gefaßt, so gebe man ihnen noch die für mechanische Schüler sehr schwierige Aufgabe auf, eilf Tausend, eilf Hundert und eilf (oder zwölf Tausend, siebzehn Hundert und Achtzehn ꝛc.) mit Ziffern auszudrücken. Sind sie bildend unterrichtet worden, so werden sie sogleich inne werden, daß eilf Hundert gleich sey Tausend und ein Hundert, und daß folglich dieses Tausend zu den eilf Tausend vorher gezählt und mithin das Ganze 12111 geschrieben werden müsse.

β. Vom

β. Vom Schreiben und Lesen der Theilzahlen.

§. 14.

Vorbemerkung.

Jedes Ganze läßt sich in zwei, drei, vier, und so weiter in so viele gleiche Theile theilen als man will. Jeder dieser Theile erhält seinen Namen von der Anzahl derselben, in welche das Ganze getheilt ist. Ist z. B. ein Apfel in 2. 3. 4 ꝛc. gleiche Theile getheitt, so heißt jeder Theil ein Zweitel (oder halbes) ein Drittel, ein Viertel. Sind dergleichen gleiche Theile mehrere vorhanden, so werden ihnen eben diese Namen beigelegt, z. B. 1. 2. 3. 8. 20. 100 Zweitel, Drittel oder Viertel. Das Ganze wird, in Rücksicht dieser mit ihm vorgenommenen Theilung, das Theilganze, und die Zahlen, welche eine bestimmte Anzahl dieser gleichen Theile angeben, Theilzahlen genannt.

Anm. Nur erst, wenn den Schülern diese Begriffe von Theilganzen und Theilzahlen wieder recht deutlich gemacht worden sind, kann mit dem folgenden fortgefahren werden.

§. 15.

Verschiedene Art, die Theilzahlen zu schreiben.

Man kann den Theilzahlen eben so mit Worten den Namen beifügen, wie dieß bei andern benannten Zahlen

z. B.

z. B. 6 Aepfeln, 3 Gulden ꝛc. geschieht, und daher schreiben 6 Viertel, 3 Fünftel ꝛc. der Kürze wegen aber werden hierzu Zahlen gebraucht, welche nach Ziehung eines Querstriches unter die Theilzahl gesetzt werden. Obige beiden Theilzahlen werden folglich ganz mit Ziffern geschrieben $\frac{6}{4}$, $\frac{3}{4}$ und wie oben stehet ausgesprochen. Wie werden folglich geschrieben:

Ein Zweitel (oder ein Halbes), zwei —, drei —, vier —, zwölf —, funfzehn —, vier und zwanzig —, hundert — Zweitel?

Wie 3. 2. 1 Drittel; 1. 2. 3. 4. 5. 6 Viertel; 7 Fünftel, 8 Sechstel, 9 Siebentel, 10 Achtel, 11 Neuntel, 12 Zehntel, 13 Eilftel, 25 Sechs und dreißigtel?

Anm. 1. Man übe nun auch hierauf seine Schüler im Lesen solcher Theilzahlen, und frage dabei genau nach, was die untere Zahl anzeige (den Namen des Theilganzen nach der Anzahl der Theile in welches das Ganze sich getheilt befindet); und was die obere Zahl ausdrücke.

2. Dabei kann ihnen zugleich der Unterschied zwischen einer ächten, und unächten Theilzahl beigebracht werden. Unächt heißt sie nähmlich, wenn sie mehr Theile angiebt, als das Ganze enthält. $\frac{6}{4}$ z. B. enthält 2 Theile mehr und sollte eigentlich geschrieben werden 1 Ganzes und $\frac{2}{4}$, weil $\frac{4}{4}$ ein Ganzes ausmachen.

§. 16.

§. 16.

Vom Schreiben doppelter Theilzahlen.

Wird eine Theilzahl weiter getheilt, so erhält man eine doppelte Theilzahl. Z. B. Ein Laib Brod wird unter 4 arme Familien gleich vertheilt, wornach jede derselben $\frac{1}{4}$ erhält. Die erste dieser Familien besteht aus 2, die andere aus drei, die dritte und vierte aus 4 Personen, welche sich wieder in dieß $\frac{1}{4}$ zu theilen haben. Jedes Glied der ersten Familie erhält ein halbes Viertel, der zweiten Familie ein Drittel-Viertel, und der beiden letzten Familien ein Viertel-Viertel. Wie wird dieß bloß durch Ziffern ausgedrückt? $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, $\frac{\frac{1}{3}}{4}$, $\frac{\frac{1}{4}}{4}$ ($=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$.) und gelesen? Ein halb Viertel, ein Drittel von einem Viertel; ein Viertel von einem Viertel. Wie werden folgende doppelte Theilzahlen gelesen: $\frac{\frac{3}{4}}{5}$, $\frac{\frac{7}{5}}{8}$, $\frac{\frac{6}{10}}{2}$, $\frac{\frac{4}{15}}{20}$? Wie $\frac{2\frac{1}{2}}{6}$? (zwei und ein halbes Sechstel).

B. Ponderiren mit Ziffern.

§. 17.

Allgemeine Vorbemerkung.

Bei dem Ponderiren oder Zahlmessen mit Ziffern haben die Schüler nichts anderes zu thun, als die frühere Operationsweise des Verbindens und des Zerlegens zu wiederholen, um hierdurch dahin gebracht zu werden,

an

an diese Zahlzeichen den deutlichen Begriff von der Größe einer jeden damit bezeichneten Zahl zu knüpfen. Es bleibt daher für diese Anweisung zum Zifferrechnen nichts übrig, als den Lehrern vorzuzeichnen, welche Aufgaben sie jenen hierbei zur selbstthätigen Lösung zu ertheilen haben, und sie dabei zur Ersparung des Raums auf §. 26 bis 29 in der Anweisung zur Zahlenrechenkunst hinzuweisen.

§. 18.

Stufengang des Ponderirens mit Ziffern.

Zuerst ist den Schülern aufzugeben, die Zahlgrößen von 1 bis 10 aus zwei Bestandtheilen in systematischer Stufenfolge zu konstruiren oder zu schaffen, und sie sodann wieder in dieselben Bestandtheile auf folgende Weise zu zerlegen:

$1+1=2$ und $2=1+1$
$2+1=3$ — $3=2+1$ u. s. w.

Hierauf die Hervorbringung derselben Zahlgrößen aus drei Bestandtheilen in Verbindung wieder mit ihrer gleichmäßigen Zerlegung:

$1+1+1=3$ und $3=1+1+1$
$2+1+1=4$ — $4=2+1+1$
$2+2+1=5$ — $5=2+2+1$ u. s. w.

Von dieser Aufgabe geht es auf gleiche Weise zum Schaffen und Zerlegen der Zahlgrößen zweiter Ordnung fort:

a) mit 2 Bestandtheilen

10 + 10 = 20 und 20 = 10 + 10
20 + 10 = 30 — 30 = 20 + 10 u. s. w. Siehe S. 67 des ersten Kursus.

b) mit 3 Bestandtheilen,

wobei sogleich mit dem Zerlegen angefangen werden darf:

30 = 10 + 10 + 10
40 = 20 + 10 + 10 u. s. w.

Anm. 1. Auf gleiche Weise wird auch das Ponderiren mit den Zahlgrößen der dritten und vierten Ordnung fortgesetzt, wenn der Lehrer es nöthig finden sollte. Sind die Schüler aber in dieser Verfahrungsweise genugsam befähigt, so sind sie mit der bloßen Wiederholung derselben an den Zahlen der folgenden Ordnungen billig zu verschonen.

2. Es kommt auf die Befähigung der Schüler an, ob ihnen vom Lehrer, zur Ersparung der auf andere Klassen zu verwendenden Zeit, obige Aufgaben zur alleinigen Bearbeitung überlassen werden dürfen, oder ob sie damit vorher an der Wandtafel unter seiner Aufsicht einen Versuch anzustellen haben. Uebrigens dürfte es gut seyn, den fähigsten Schülern eine Revision der Arbeiten der minder fähigen zu übertragen, ehe sie von dem Lehrer selbst vorgenommen werden.

§. 19.

§. 19.

Fortsetzung.

Noch ist das Ponderiren mit Zahlgrößen übrig, welche aus zwei oder mehreren Zahlenordnungen bestehen. Bei diesen gilt wieder als Generalregel, daß sie nur in ihre Ordnungen zerlegt werden dürfen. Man darf folglich nicht sagen z. B. 11 besteht aus 6+5 oder 7+4 rc., sondern aus 10+1; weil alle Rechenfertigkeit sich auf das Dezimalsystem als Stützpunkt gründet. In dieser Absicht sind den Schülern folgende Aufgaben vorzulegen:

a) die Zahlen von 11 bis 19, und von 21 bis 29 sind in ihre beiden Bestandtheile nach den bestehenden Zahlenordnungen zu zerlegen.

b) Die Schüler haben sich entweder jeder selbst oder einer dem andern ungeordnete Reihen von Zahlen, aus zwei, drei und vier Ordnungen bestehend, zum Zerlegen aufzugeben. Z. B. 98=90+8; 106=100+6; 123 =100+20+3; 1816=1000+800+10+6.

Anm. Wenn manchem Lehrer die letztern Aufgaben zu leicht vorkommen, so lasse er sich dadurch nicht verführen, sie zu übergehen, weil alles beim Rechnen darauf ankommt, die Bestandtheile jeder Zahlgröße mit größter Klarheit und Besonnenheit aufzufassen.

II. Vom

II. Vom Addiren und Multipliciren oder von der einfachen Art, Zahlen bloß durchs Verbinden zu finden.

§. 20.

1. Vom Addiren überhaupt.

Addiren oder Zusammenzählen heißt die Zahl suchen, die so viele Einheiten enthält als mehrere angegebene Zahlen (Posten) zusammen genommen. Die zu suchende Zahl heißt Summe. Gefunden wird sie durch das Zusammenzählen auf eine doppelte Weise: a) bei wenigen und geringen Zahlen dadurch, daß die Posten auf eine Linie hingeschrieben und mit einem aufrechtstehenden Kreuze verbunden werden. Z. B. $2+4+7=13$ welches gelesen wird: Zwei und Vier und Sieben ist Dreizehn. b) Größere Zahlen werden so untereinander gesetzt, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen. Hierauf wird ein Querstrich unter die sämmtlichen Posten gezogen, um darunter die zu findende Summe zu schreiben; zuletzt

das

das Zusammenzählen von der untersten Ordnung angefangen, und damit fortsteigend fortgefahren.

Anm. Ich hoffe den Lehrern nicht mehr sagen zu dürfen, daß auch diese Belehrung bildend geschehen müsse, und die Schüler selbst den Grund, und mit demselben die Regel auffinden müssen.

§. 21.

a) Aufgaben zur Erlernung des Addirens nach erster Art.

Diese haben vorzüglich zur Absicht, die Uebungen, welche von den Schülern schon unmittelbar mit den Zahlen selbst, im ersten Kursus des Denkrechnens, vorgenommen worden sind, an den Ziffern zu wiederholen, und sie dadurch in dem richtigen Zusammenfassen mehrerer Zahlen zu einer einzigen auf immer zu befähigen. Wenn sie denselben blos in ihren Anfängen von den Lehrern vorgezeigt werden, so können die Schüler diese Aufgabe für sich allein verfertigen, und jene gewinnen dadurch Zeit, sich indessen mit einer andern Klasse zu beschäftigen. Diese Aufgaben sind die im ersten Kursus von §. 32 — 35 angegeben, wovon wir hier nur den Anfang einer jeden herzusetzen haben.

1. Addiren mit Zahlen der ersten Ordnung: 1 + 3 = 4, + 3 (Sprich: 1 und 3 ist 4 und 3 noch weiter dazu, ist) = 7, + 3 = 10, und so weiter bis Hundert. Eben so wird 3 mit 2 und dann mit sich selbst fort bis Hundert addirt: 2 + 3 = 5, + 3 ꝛc. 3 + 3 = 9, + 3 ꝛc. —

Die

Die folgenden Aufgaben von den Zahlen 4 bis 10 sind im ersten Kursus angegeben, und daselbst nachzusuchen.

Anm. Hierbei müssen wir die Lehrer wiederholt daran erinnern, genau darauf zu halten, daß sich ihre Schüler dabei an das Dezimalsystem binden, weil sie nur hierdurch vor Mechanismus verwahrt und zu einem anschaulich sichern (mathematisch gewissen) Rechnen geführt werden.

§. 22.

Fortsetzung.

2. Nun folgen dieselben Aufgaben mit Zehnern auf folgende Weise 10+20=30, +20=50 und so weiter, worüber das Nähere §. 33 des ersten Kursus nachzusehen ist.

3. Addiren mit 2 Zahlen, die aus Einern und Zehner bestehen, und zwar zuerst in aufeinander folgender Reihe von 11 bis 19. Z. B. 11+11=22 (denn 10+10=20; 1+1=2, und 20+2=22), +11 =33 rc.; alsdann in ungeordneter Reihe z. B. 13+14 =? 27+32=? rc.

Anm. Addizions-Aufgaben von mehreren und größern Zahlen eignen sich mehr für die Addizionsweise zweiter Art, weswegen die Schüler in der ersten Art nicht weiter geführt werden, als hier vorgeschrieben ist.

§. 23.

b) Aufgaben zur Erlernung des richtigen Ansatzes nach zweiter Art.

In ersterer Hinsicht gebe der Lehrer seinen Schülern folgende Zahlen zum richtigen Anschreiben auf.

263	2	1836	7302	1002
712	24	20	36	2
———	235	143	2001	700
	———	———	———	———

Hierbei begnüge sich der Lehrer nicht damit, daß sie von dem Schüler vielleicht blos aus dunkelm Antriebe richtig geschrieben werden, sondern er frage auch nach dem Grunde, warum Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. geschrieben werden müssen, wenn man Gleiches mit Gleichem zusammenfassen will. Größere Ansätze, als die obigen, können von den Schülern selbst erfunden werden.

§. 24.

c) Leichte Aufgaben zur ersten Einübung des Zusammenzählens.

Hierbei dürfen nur solche Aufgaben statt finden, wobei die zusammenzuzählenden Zahlen jeder vorkommenden Ordnung nicht die Summe von 9 übersteigen, wie in dem vorhergegangenen Aufgaben der Fall ist, wozu hier noch folgende gefügt werden:

431

431	123	567	453
134	231	121	214
211	312	211	332

Die Summen haben die Schüler selbst zu suchen, sie sogleich bei jeder Zahlordnung unter den Querstrich zu schreiben, und zuletzt die ganze gefundene Summe auszusprechen. Hierauf fordere man sie zum Beweise auf, daß auch diese Summe so viele Einheiten (Einer, Zehner, Hunderter) wirklich enthalte, als die angesetzten 3 Posten. Gehörig geleitet, werden sie antworten: gewiß, denn 4+1+1 Einer sind ja wirklich 6 Einer; 3+3+1 Zehner sind 7 Zehner; und 4+1+2 Hunderter sind wirklich 7 Hunderter, 700 aber +70+6=776.

Bei dem dritten, vierten und fünften Rechenansatze im vorigen Paragraphen, die nun auch zusammen zu rechnen sind, wird es kaum nöthig seyn, die Schüler vorher darauf zu führen, daß 0+0+0=0 (Sprich: Keins und Keins und Keins ist Keins); 1+0=1; 6+0+3 =9; 0+3+0=3 ꝛc.; wenn sie anders den Begriff von dem Keins oder Null richtig aufgefaßt haben.

§. 25.

d) Aufgaben von Zahlen einer Ordnung, welche mehr als 9 zusammen betragen.

Hierbei lasse man absichtlich die Schüler in Verlegenheit, was sie mit der zweiten Ziffer anfangen sollen, da sie doch nur eine einzige unter jede Ordnung als

Summe setzen dürfen. Im Falle sie auf folgende Weise verfahren und zwei Ziffern unter einander setzen, nöthige man sie, weiter fort zu addiren, bis sie eine Summe erhalten, die nur Eine Reihe von Zahlen bildet. Z. B.

```
 68795802354 1
 98583646512 6
 ─────────────
 11171448866 7
 1562   8
 ─────────────
 1,673,794,488,667
```

Man mache sie aufmerksam, daß sie sich diese doppelte Mühe ersparen könnten, wenn sie die höhere Zahl sogleich zu der folgenden Ordnung addirt hätten, ohne sie vorher anzuschreiben. Um sie aber während des Anschreibens der niedern Zahl nicht zu vergessen, hätten sie die größere Zahl sich mit den Worten entweder einzuprägen „eins behalte ich im Sinn" (oder „eins habe ich zum folgendem zu zählen") oder sie könnten auch anfänglich die im Sinn zu behaltende Zahl unter die folgende Zahlenreihe entweder in kleinerer Gestalt oder eingeklammert setzen. Z. B.

```
  879863               898872
  765482               676795
   1111        oder    296861
 ───────               (2)(2)(2)(2)
 1645345              ─────────
                       1872528
```

Anm.

Anm. Jetzt können die Schüler auch erst auf den Grund geleitet werden, warum, von der Rechten nach der Linken zu, gerechnet wird.

§. 26.

e) Aufgaben zum richtigen Zusammenzählen der einzelnen Zahlen.

Alles kommt hiebei darauf an, die Schüler strenge anzuhalten, beim Addiren das Dezimalsystem zu Grunde zu legen, wodurch sie nach einiger Uebung sowohl zur größten Sicherheit als Fertigkeit gelangen. Man gebe zu dem Ende folgende Aufgaben auf,

a) leichte einfache,

1) 9	2) 8	3) 7	4) 6	5) 5	6) 4	7) 3
9	7	9	8	7	8	9

Bei Exempel 1) hat der Schüler zu sprechen: 9+1=10 +8=18. Neun und Eins (die man von der andern 9 nimmt) ist 10 und (hierzu, die nach Wegnahme der Eins von Neun noch übrigen) 8 ist 18.

2) 8+2=10+5=15
3) 7+3=10+6=16
4) 6+4=10+4=14
5) 5+5=10+2=12
6) 4+6=10+2=12
7) 3+7=10+2=12

b) Mit långerer Zahlenreihe.

6.	Sprich: 6 und
8.	4=10+4=14+
7.	6=20+1=21+
9.	9=30+
4.	4=34+
5.	5=39+
8.	1=40+7=47+
9.	3=50+6=56+
7.	4=60+3=63+
6.	6=69+
4.	1=70+3=73+
3.	3=76+
5.	4=80+1=81+
8.	8=89+
6.	1=90+5=95
7.	5=100+2=102+
3.	3=
105.	

Anm. 1) Man lasse die zum Gebrauche nur allein zu empfehlende Probe damit vornehmen, und die Schůler aufwårts addiren, um ihre Rechnung selbst zu revidiren. Die gewöhnliche Probe, daß man 9 in den Posten und in der Summe ausstreichen läßt, um zu sehen, ob man gleiche Reste erhält, ist an sich blos mechanisch, und im Leben nicht anwendbar, wo nur obige Revision statt findet, die auch völlig genüget.

2) Der

2) Der Lehrer kann nun entweder seinen Schülern noch eine lange Reihe von Posten mit Zahlen aus zwei, drei, vier, fünf Ordnungen aufgeben, und sie anhalten, dabei strenge nach obiger Zusammenzählungsart zu verfahren; oder auch unter ihnen arithmetische Wettkämpfe anstellen lassen, wobei je zwei und zwei einander größere Additions-Exempel aufgeben, und solche gegenseitig revidiren. Die Preisträger erhalten vom Lehrer unter ihre richtig gelößte Aufgabe das Beilegewort gut.

§. 27.

D) Einige Aufgaben mit genannten Zahlen.

1) Wie alt ist das Menschengeschlecht, wenn von

Adam bis Noah oder der Sündfluth	1656	Jahre,
von Noah bis zu Mosis Befreiung der Israeliten	796	—
von da bis zur Erbauung der Stadt Rom	778	—
von da bis zur Geburt Jesu	753	—
von da bis zur Stiftung der Mahomedanischen Religion	622	—
von da bis zur Reformation der christlichen Kirche durch Luthern	895	—
von da bis zum Jahre 1817	300	—
gerechnet werden?	(5800	Jahre)

2) Europa wird auf 171,834, Asien auf 641,092, Afrika auf 531,638, Nordamerika auf 231,193, Südamerika auf 340,979, Südindien auf 162,000 Geviert- oder Quadratmeilen groß geschätzet, wie viel Geviertmeilen enthalten diese fünf Welttheile zusammen?

3) In

3) In Europa zählt man 160, in Asien 650, in Afrika 150, in Amerika vielleicht 100, in Südindien vielleicht 12 Millionen Menschen; wie viel sind dieß Erdbewohner zusammen.

4) Wie viele Menschen leben in Europa, wenn die Zahl der Einwohner angenommen wird in Portugall auf 3450,000; in Spanien 10,500,000; in Frankreich (ohne Korsika) 28,818,000; in Niederlanden 4600,000; in Großbrittanien 15,160,000; in Dännemark 1400,000; in Schweden und Nordwegen 3,260,000; in Rußland und Polen 35,198,000; in Preußen 2,651,000, in den nicht zu Deutschland und Italien gehörigen Ländern Oestreichs 12,159,000; in den deutschen Bundesstaaten 27,000,000; in der Schweiz 2,376,000; in Italien 18,237,000; in der europäischen Türkei 8,000,000.

5) Wie viele Soldaten werden in Europa mit Ausnahme der Türkei zusammen unterhalten? In Rußland sind es 450,000; in Oestreich 300,000; in Preußen 250,000; in Baiern 70,800; in den übrigen deutschen Bundesstaaten 80,000; in Schweden 46,000; in Dänemark 36,000; in Niederlanden 80,000; in England 130,000; in Frankreich 350,000; in Spanien 100,000; in Portugall 40,000; in der Schweiz 40,000; in Italien 100,060.

6) An bekannten Thierarten zählt man, an Säugethieren 230, Vögeln 946, Amphibien 292, Fischen 404, Insekten 3060, Gewürmen 1203, mithin zusammen?

§. 28.

§. 28.

2. Vom Multipliziren überhaupt.

Beim Multipliziren oder Vervielfältigen sucht man die Zahl, die so viele Einheiten enthält, als eine gegebene Zahl, wenn diese so oft zu sich selbst addiret (zusammengezählt) wird, als eine andere angibt (oder Einheiten enthält). Z. B. man sucht die Zahl, welche so viele Einheiten enthält, als die Zahl 4, wenn diese 3 Mahl zu sich selbst addiret wird. Anstatt die Zahl 4 drei Mahl unter einander zu setzen, wie folgt:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \\ 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

setzt man blos die Hauptzahl 4 an, schreibt den Vervielfältiger 3 darunter, und spricht 3 × (mahl) 4 ist (=) 12 oder die Summe, das heißt, die Zahl, welche durchs Vervielfältigen gefunden wurde, oder das Erzeugniß — (sonst Produkt —) aus den beiden Vervielfältigungszahlen (Faktoren). Hieraus erhellet, daß das Multipliziren nur ein abgekürztes Addiren ist, und in den Fällen statt findet, wenn gleichlautende Zahlen summirt werden sollen.

Anm. Man vermeide die allzuvielen Kunstausdrücke, besonders die fremden.

§. 29.

§. 29.

a) Ansatz- und Verfahrungsweise bei größern Hauptzahlen und einer einfachen Vervielfältigungszahl.

α) Wenn die einzelnen Reihen der Hauptzahlen die Summe von 9 nicht übersteigen.

Die erste Aufgabe sey, die Summe von 1234 zu finden, wenn diese mit . . . . 2 multiplizirt (zwei Mahl zu sich selbst addirt) werden soll. Es wird 1) ein Querstrich unter beide Posten gezogen, und 2) die Einheiten, dann die Zehner, Hunderter und Tausender zwei Mahl zu sich selbst addirt, und unter jede Ordnung die gefundene Zahl (Summe oder Erzeugniß) geschrieben. Die Schüler werden finden, daß dieß die Zahl 2468 ist.

Anm. 1) Man lasse die Schüler selbst solche Aufgaben unter einander erfinden. Einige davon müssen zum Theil Keiner (Nullen) enthalten.

2) Anfänglich halte man die Schüler auch an, die Ordnungen zu benennen, aus welchen die Zahlen multiplizirt werden sollen. Bei obiger Aufgabe haben sie folglich zu sprechen: 2 × 4 Einer ist 8 Einer; 2 × 3 Zehner = 6 Zehner; 2 × 2 Hunderter = 4 Hunderter; 2 × 1 Tausender = 2 Tausender. Hierdurch werden sie allein in Stand gesetzt, die mathematische Gewißheit der Richtigkeit ihrer Auflösung

lösung einzusehen, und darüber auch Rechenschaft zu geben. Denn 2468 ist ja 2000 + 400 + 60 + 8. — Daſſelbe Verfahren findet bei den vorkommenden Keinern statt, wobei die Schüler zu sprechen haben: 2 × 0 (zwei Mahl kein Einer oder Zehner ꝛc.) ist 0 (kein Einer oder kurzweg, Keins.

§. 30.

β) Wenn sie solche übersteigen.

Die Grundzahl sey 456 und der Vervielfältiger (Angeber, wie oft sie zu sich selbst addirt werden soll) sey 3. Zuerst lasse man die Schüler nur nach der Regel verfahren, daß unter Einer nur die Einer, unter die Zehner nur die Zehner ꝛc. gesetzt werden dürfen, und sie werden ohne Zweifel diese Aufgabe auf folgende Weise lösen.

```
   456
     3
   ———
    18
   15
  12
  ————
  1368
```

Hierauf sage man ihnen, daß sie sich die Addizion der gefundenen einzelnen Summen ersparen könnten, wenn sie die zweite höhere Zahl blos vormerken, und sogleich zu der gefundenen Summe bei der folgenden Ordnung addiren wollten. Diese Vormerkung könne entweder

der blos in Gedanken geschehen, oder anfänglich auch durchs Anschreiben der Zahl unter die nächstfolgende, wobei aber jene von ihnen auf folgende Weise einzuklammern sey:

```
   4 5 6
 (1)(1)3
 -------
 1 3 6 8
```

Auf gleiche Weise sind auch folgende Aufgaben von den Schülern zu behandeln: 867 × 4; 2948 × 5; 6708 × 6; 7030 × 7; 5006 × 8; 7865 × 9; welche nach Bedarf entweder von den Lehrern oder von den Schülern selbst noch weiter vermehrt werden können.

Anm. 1. Auch hierbei unterlasse man nicht, ihnen Beweis abzufordern, ob die Summe z. B. 1368 wirklich gleich sey der Zahl 456 wenn diese drei Mahl zu sich selbst addirt würde. Nur hierdurch kann das Aufkommen eines blos mechanischen Verfahrens verhütet werden.

2. Man kann, um die Schüler zur Einsicht zu führen, daß es besser sey, bei der rechten Hand mit der Multiplikazion der Hauptzahl anzufangen, ihnen auch aufgeben, von der linken Hand den Versuch damit zu machen. Die Aufgaben sind:

```
1)  1234  Hauptzahl
       2  Vervielfältiger
    ----
    2468  Summe.
```

2)

2) 74862 wobei die einzelnen Erzeugnisse unter einander gesetzt werden müssen..

```
   74862
       4
   ─────
   28
    16
     32
      24
        8
   ─────
  299,448
```

§. 31.

b) Ansatz- und Verfahrungsweise bei mehrfachen Vervielfältigungszahlen.

Die Aufgabe sey: die Summe von Stunden zu finden, welche die 365 Tage des Jahres zusammen enthalten, und folglich 365 ⋊ 24 Stunden betragen müssen. Der Ansatz ist

```
365
 24
```

und die Verfahrungsweise folgende: 4 ⋊ 20; die Keins wird unter dieselbe Reihe gesetzt, die 2 Zehner aber für die folgende im Sinn behalten. 4 ⋊ 6 ist 24 und die 2 im Sinn behaltenen Zehner 26; wovon 6 darunter geschrieben, und die 2 aufs neue im Sinne behalten wird, um sie mit der folgenden Summe sogleich zu addiren: 4 ⋊ 3 = 12 + 2 = 14.

Jetzt folgt das Multipliziren mit der zweiten Vervielfältigungszahl, den 2 Zehnern, wobei gesprochen wird 2 ⋊ 5 = 10. Beim Niederschreiben wird der Schüler

ler ungewiß seyn, wohin er solche zu setzen hat. Um ihn zur Gewißheit seines Thuns zu leiten, frage man ihn blos vorher, aus welcher Ordnung ist 2 und 5? Was ist mehr, 2 × 5 oder 5 × 2? und 5 × 2 Zehner sind wie viele Zehner? wo sind folglich diese 10 Zehner zu setzen, unter die Einer oder unter die Zehner? — Die Berechnung wird dann in folgender Gestalt erscheinen.

```
 365
  24
────
1460 (Einer)
730  (Zehner)
────
8760
```

Anm. Man kann ihnen bei dieser Gelegenheit zeigen, daß man auch mit der Zahl der höhern Ordnung anfangen könne, um die gleiche Summe zu erhalten. Aber dann müsse man auch das Erzeugniß des Vervielfältigers der ersten Ordnung dem Erzeugniß des Vervielfältigers nicht gleich, sondern jenem, wie folget, vorsetzen:

```
 365
  24
────
730
1460
────
8760
```

§. 32.

c) Wenn dabei Keiner vorkommen.

1) Zuerst führe man seine Schüler zur Erkenntniß, daß die Multiplication mit Keins keine Summe gibt. 0 × 0 = 0; 3 × 0 = 0; 0 × 3 = 0.

2) Man nehme hierauf die vorige Grundzahl, und frage seine Schüler, welche Summe sie finden würden, wenn solche 10 Mal zu sich selbst gezählt würde; wie viel folglich 10 × 5 Einer 10 × 6 Zehner und 10 × 3 Hunderter sey? Sie werden schreibend antworten: 3650. Man frage weiter: um wie viele Plätze jede dieser drei Zahlen durch die zehnfältige Vermehrung vorwärts gekommen sey? (Um einen) Was mithin blos der Grundzahl in solchem Falle vorgeschrieben werden dürfe? (Eine Keins) — Hierauf lasse man seine Schüler obige Aufgabe auf folgende verschiebene Weise mit Ziffern berechnen, um die leichteste durch Vergleichung selbst heraus zu finden.

```
 365       365       365      365 × 10
  10        10        10      3650
----      ----      ----
 000      3650      3650
365
----
3650
```

3) Man gebe den Schülern noch folgende Beispiele mit mehreren Keinern auf

a) 563 × 100; d) 732 × 206; b) 3754 × 3420

```
e) 36748     f) 47831     c) 2000
    2306         1006          300
   -----        -----
```

wobei

wobei die Schüler selbst wieder den leichtesten Ansatz, so wie die richtige (auf anschauliche Ueberzeugung sich gründende) Verfahrungsweise zu bestimmen haben. a) und b) werden am kürzesten angesetzt und berechnet

```
  563              3754
    100             3420
-------           ------
  56300             75080
                   15016
                  11262
                  ------
```

c) Hier schneidet man die Keiner sogleich ab, und setzt ihre Anzahl unter die Linie wie folgt

```
20|00 = 20            oder auch  2|000
 3|00    3                       3|00
       ------                   --------
       600000                    600000
```

d) e) f) Hier werden die Keiner gar nicht multiplizirt, und mit der folgenden Zahl sogleich fortgefahren, wobei aber auf richtigen Ansatz, nach der oben erklärten Weise, zu sehen ist. Z. B.

```
     4783
     1006
    -----
    28698
 4783
---------
```

§. 33.

Von einigen Erleichterungsmitteln beim Multipliziren.

Man kann seine Schüler hier auch sogleich in voraus mit der Erleichterung bekannt machen, die man sich durch Zerlegung der Zahl des Vervielfältigers verschaffen kann. Z. B. Statt 7268 mit 9 zu multipliziren, was für manche Personen schwer ist, kann man jene Zahl auch mit 5 und 4, als Bestandtheile der 9 multipliciren

$$\begin{array}{r} 7268 \\ 4 \\ \hline 29072 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7268 \\ 5 \\ \hline 36340 \\ 29072 \\ \hline 65412 \end{array}$$ hierzu die 4fache mit

oder auch in 3×3 zerlegt

$$\begin{array}{r} 7268 \\ 3 \\ \hline 21804 \\ 3 \\ \hline 65412 \end{array}$$

oder mit $9 + 1 = 10$ multiplizirt, und von der Summe 1×7268 abgezogen:

$$\begin{array}{r} 7268 \\ 10 = 72680 \\ 7268 \\ \hline 65412 \end{array}$$

Das-

Dasselbe Erleichterungsmittel ist auch bei vielfachen Vervielfältigern anwendbar z. B. 24 = 4 × 6

$$\begin{array}{r} 365 \\ 6 \\ \hline 2190 \\ 4 \\ \hline 8760 \end{array}$$

Hierher gehört auch das Erleichterungsmittel mit dem Vervielfältiger 11 welche = 10 + 1. 11 × 11 = 11 × 10 folglich 110 + 11 = 120. 12 × 11 = 12 × 10 = 120 + 12

$$\begin{array}{r} 110 \\ 11 \\ \hline 120 \end{array}$$

folglich kann man mit Weglassung der Keins sogleich setzen 13 × 11 = 13

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 143 \end{array}$$

$$22 \times 11 = \begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 242 \end{array}$$

$$123 \times 11 = \begin{array}{r} 123 \\ 123 \\ \hline 1353 \end{array}$$

oder die erste Zahl vorsetzen, dieselbe mit der zweiten, die zweite mit der dritten addiren, z. B. 123 × 11 = 1353. 30 × 11 = 330.

§. 34.

§. 34.

d) Die Verfertigung des Einmahleins.

Um das Vermögen des Zusammenfassens der einzelnen Zahlen erster Ordnung zu voller Fertigkeit zu bringen, dürfte nichts zweckmäßiger seyn, als den Schülern die Verfertigung des Einmaleins in folgenden dreifachen Formen von a) 1 × 1 bis 9 × 9 b) 1 × 11 bis 10 × 20; und 1 × 21 bis 10 × 30 aufzugeben; ja wer glaubt, noch weiter mit ihnen gehen zu können, mag auch noch die Verfertigung des 11 × 11 bis 20 × 20 hinzufügen:

I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3		9	12	15	18	21	24	27	30
4			16	20	24	28	32	36	40
5				25	30	35	40	45	50
6					36	42	48	54	60
7						49	56	63	70
8							64	72	80
9								81	90
10									100

II.

1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

III.

1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
4	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
5	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
6	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
7	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210
8	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240
9	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
10	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300

Anm.

Anm. Bei Verfertigung dieser drei Tafeln — die vorher an der schwarzen Wandtafel mit allen Schülern durchgegangen werden können — sind letztere mit aller Sorgfalt dazu anzuhalten, bei ihrem Thun mit der größten Besonnenheit zu Werke zu gehen, weil dieß der höhere Zweck bei allen diesen Rechenübungen bleibt. Sie müssen daher bei jeder Summe die volle Gewißheit derselben angeben. Z. B. daß 3 × 14 gewiß 42 sey, weil 3 × 10 = 30; 3 × 4 = 12; und 30 + 12 = 42. Oder daß 8 × 8 gewiß 64 sey, weil 8 × 8 = 4 × 16 = 2 × 32 = 2 × 30 = 60; und 60 + 2 × 2 = 64.

§. 35.

e) Einige Aufgaben mit benannten Zahlen.

1) Wenn ein Gang auf einer Mühle täglich 3 Scheffel mahlen kann, wie viel kann er in einem Jahre mahlen? (1095) wie viel eine Mühle mit 6 Gängen? (6570).

2) In einem Hause sind 13 Fenster, jedes von 4 Flügeln, jeder Flügel hat 8 Scheiben, wie viel sind das Scheiben zusammen? (416).

3) Wie viel Stunden hat ein Kind von 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. Jahren durchlebt? (das Jahr hat 365 Tage und 6 Stunden = 8766) 35,064. 43,830. 52,596. 61,362. 70,128. 78,894. 87,660.

4) 5 Kinder erben, jedes 1936 Thaler oder Gulden: wie viel betrug die ganze Erbschaft? 9680.

5) Der entfernteste Planet von der Sonne, der Uranus, braucht 83 Mahl mehr Zeit als die ~~Sonne~~, um seinen Kreislauf um die Sonne zurückzulegen. Wer dort 6 Jahr alt ist, wie alt würde derselbe auf unserer Erde seyn?

6) Was essen 1407 Familien einer Stadt zusammen an Getreide, wenn man auf jede 8 Scheffel rechnet? 11,256.

7) Wie groß ist ein Zimmer, das nur 9 Fuß breit und 13 Fuß lang ist? 117.

8) Auf ein Gartenbret können in die Breite 9 und in die Länge 188 Pflanzen gesetzt werden, wie viel zusammen? 1692.

9) Auf einem Felde stehen 46 Reihen Bäume, und jede Reihe enthält 36 Bäume, wie viel sind dieß zusammen? 1656.

10) Wie viele Ziegeln braucht man zum Dache eines neuen Hauses, wenn jede Seite des Daches 36 Ziegel hoch und 112 Ziegel breit ist? zu einer Seite 4032, zu beiden 8064.

11) Wie viel macht ein ganzer Tag (= 24 Stunden) Minuten? (1 Stunde = 60 Minuten) 1440. Wie viele Sekunden? (1 Minute = 60 Sekunden) 86,400.

12) Ein Soldat braucht täglich 2 Pfund Brod. Wie viel verzehrt er in einem Jahre? 730. Wie viel eine Armee von 50,000 Mann? 36500,000.

13) 1000 Mann Soldaten kosten jährlich zu unterhalten 150,000 fl. was kosten 60,000 Mann? 9000,000.

14) Ein

14) Ein gesunder Mann verdient wenigstens jährlich 100 fl. Wie viel Verdienst geht daher bei 60,000 nicht arbeitender Soldaten verlohren? 6,000,000.

15) Auf 26 Einwohner zählt man jährlich eine Geburt; wie viel beträgt dieß bei 3 Millionen Einwohnern?

16) Eine Kanonenkugel geht in einer Sekunde 600 Fuß weit. Wie weit in einer Stunde (= 60 Minuten oder = 3600 Sekunden)? 2,160,000 Fuß. Wie weit in 1 vollem Tage? wie weit bis zum Monde, wohin sie 23 Tage zu fliegen hat? Wie weit bis zur Sonne, wohin sie 25 Jahre fliegen muß.

Anm. Da die Multiplikazionsprobe auf das Dividiren beruht, so muß sie hier noch zur Zeit übergangen werden.

III. Vom Subtrahiren und Dividiren oder von der einfachen Art, Zahlen bloß durchs Trennen zu finden.

§. 36.

1. Vom Subtrahiren überhaupt.

Wenn man subtrahirt oder abzieht, so sucht man die Zahl, welche so viele Einheiten enthält, als eine angegebene

gebene Zahl, nachdem von ihr eine gewisse Anzahl von Einheiten getrennt worden ist. Es sey die gegebene Zahl 7. Es fragt sich, welche Zahl uns ihre Größe (Anzahl von Einheiten) angibt, nachdem man von ihr 2 wegnimmt? Es ist dieß die Zahl 5 denn $7 = 5 + 2$. Die Zahl, welche um eine bestimmte Anzahl von Einheiten vermindert werden soll, heißt die Hauptzahl; die andere, welche angibt, um wie viele Einheiten jene vermindert werden soll, der Abzug, und die gefundene Zahl der Rest. Bei größern Summen werden die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner ꝛc. geschrieben, eine Ordnungszahl von der andern abgezogen, und der Rest oder die gesuchte Zahl unter die gezogene Linie gesetzt, wie zum Beispiele bei folgenden, von den Schülern zu lösenden Aufgaben.

1) 67	2) 578	3) 5034	4) 3457	5) 6758
25	438	1032	2236	4006
42	140	4002	1221	2752

§. 37.

a) Von Abzugszahlen, welche größer sind als die Theile der Hauptzahl von gleicher Ordnung.

Von keiner Hauptzahl kann eine Zahl abgezogen werden, welche im Ganzen größer ist als jene. Gleichwohl findet sich öfters der Fall, daß die Zahlen einzelner Ordnungen der Hauptzahl kleiner sind als die einzelnen Zahlen des Abzuges. Es fragt sich daher, was dabei anzu-

anzufangen sey. Es sey 14 die Hauptzahl und
6 die Abzugszahl.

Sechs kann von der kleinern Zahl 4 nicht abgezogen werden, wohl aber von der folgenden Zahl 10. Von dieser 6 abgezogen bleibt 4; hierzu die übergangenen 4 Einer, von welchen nichts weggenommen wurde, macht der ganze Rest 8.

Ist die Ziffer der folgenden Ordnung ein Keiner, so muß man von den darauf folgenden Ordnungen einen Einer nehmen. Es sey z. B. die Aufgabe, von

$$\begin{array}{r} 102 \\ 16 \\ \hline 86 \end{array}$$

abzuziehen. 6 von 2 und 0 kann man nicht abziehen, wohl aber von 100 oder 10 Zehnern. Von diesen 10 Zehnern ist aber schon Einer hinreichend. 6 von 10 bleibt 4+2=6. 1 Zehner von 9 Zehnern (denn 1 Zehner wurde zum Abzuge bereits verwendet) bleibt 8.

Dieß ist die einzige, bei dieser Rechnungsart vorkommende Schwierigkeit. Damit diese von den Schülern gehörig besiegt werde, sind ihnen noch folgende Aufgaben vorzulegen.

1) 652	2) 711	3) 804	4) 1234	5) 6410
536	333	715	777	1022

6) 10,500	7) 27,000	8) 18,008	9) 100,000
7,006	2103	7218	9999

Anm.

Anm. 1) Die Regel, durch einen Punkt die nachfolgende Zahl zu bezeichnen, von der eine Einheit zum Abziehen genommen wurde, ist auch hier anfänglich anzuwenden. Uebrigens dürfte es zweckmäßig seyn, den Schülern zur eigenen Bearbeitung die Subtrakzions-Aufgaben aus dem ersten Kursus a) §. 42 mit Zahlen aus der ersten Ordnung und b) §. 43. von 100 bis auf 1 zurück in der Absicht aufzugeben, ihre früher schon an Zahlen gewonnenen Rechenfertigkeit an die Ziffern zu knüpfen.

2) Das Wort borgen glauben wir hierbei vermeiden zu müssen, nicht aus pädantischer Furcht jenes Schulmannes, der seine Zöglinge hierdurch nicht an das frühe Borgen gewöhnen wollte, sondern weil damit der Grund, warum man zur folgenden Zahl fortschreiten muß, den Schülern verborgen gehalten wird, und sie hierdurch nur an ein mechanisches Thun gewöhnt werden. Auch wird man von selbst finden, daß weit zweckmäßiger und sicherer verfahren werde, wenn man jede größere Abzugszahl von der Zahl der folgenden Ordnung allein abziehen läßt, ohne die stehen gelassene kleinere Hauptzahl mit jener auszusprechen. Man sage daher z. B. in obiger Aufgabe n. 1 nicht, 6 von 12, sondern 6 von 10 bleibt 4+2=6.

§. 38.

b) Aufgaben mit benannten Zahlen.

1) Es wurde jemand im Jahr 1859 gebohren, und starb im Jahr 1817; wie alt ist er geworden?

2. Im

2) Im Jahre 1350 wurde von Berchtold Schwarz das Schießpulver, gegen das Jahr 1300 das Papier, im Jahr 1440 von Guttenberg die Buchdruckerkunst erfunden; im Jahr 1492 Amerika von Columbus, im Jahr 1517 daselbst der Taback entdeckt; im Jahre 1586 kamen die ersten Kartoffeln aus Amerika nach Europa; im Jahre 555 wurden die Wassermühlen erfunden, und im Jahr 276 der Weinbau nach Deutschland gebracht. Wie lange ist dieß jetzt?

3) Im Jahr 1781 wurden in Paris 20,232 Kinder geboren; zu London 17,026; wie viel mehr in Paris? In einer gewissen Stadt wurden einmal 300 Menschen in einem Jahre geboren und eben so viele starben auch daselbst; um wie viele Menschen hat sich dadurch die Anzahl der Einwohner vermehrt?

4) In Paris sind 589,009 Einwohner; in London 700,000; um wie viel übersteigt die Bevölkerung der letztern Stadt jene der erstern?

5) Europa ist 171,834 Geviertmeilen groß (wovon jede zwei Stunden lang und eben so breit ist); Asien 641,092; um wie viel ist jenes kleiner?

6) Das Russische Reich enthält ohne Polen und Finnland, seine neuesten Eroberungen, 193,300 Geviertmeilen; das europäische Rußland 57,600 und Deutschland gegen 11,124. Wie groß ist das asiatische Rußland, und wie viel größer ist das erstere Reich gegen Deutschland?

7) Im Jahre 1814 baute ein Bauer auf einem und demselben Ackerfelde 6 Schober Korn, wovon jeder im Durch-

Durchschnitte 14 Metzen Korn gab; im Jahre 1816 aber 10 Schober, wovon jedoch der Schober nur 9 Metzen lieferte. Welches Jahr war für ihn einträglicher?

§. 39.

c) Proberechnungsweise.

Um die Ueberzeugung zu gewinnen, daß man beim Abziehen die richtige Zahl aufgefunden habe, darf man nur den Rest mit dem Abzuge addiren, wodurch man als Summe die Hauptzahl wieder erhalten muß. Denn der Rest ist um eben so viele Einheiten, als der Abzug enthält kleiner denn die Hauptzahl; oder der Rest und der Abzug machen die Bestandtheile der Hauptzahl aus. Werden daher jene zu einem Ganzen verbunden, so entsteht dieselbe Größe wieder. Z. B. von $5 - 2 = 3$; fügt man 2 wieder zu 3, so wird dadurch die vorige Zahl 5 gebildet.

Anm. Dieß kann an mehreren vorigen Aufgaben praktisch den Schülern nachgewiesen und sie dabei selbst darauf hingeleitet werden, daß auch umgekehrt das Subtrahiren als Probe beim Addiren dienen kann.

§. 40.

2. Vom Dividiren überhaupt.

Beim Dividiren wird die Zahl gesucht, welche angibt, wie oft sich eine Zahl von einer andern wegnehmen

men oder subtrahiren läßt. So oft jene von dieser weggenommen werden kann, so oft muß sie auch in derselben enthalten seyn. Z. B. 2 kann von 6 drei Mahl weggenommen werden, weil diese Zahl eben so oft in Sechs enthalten ist; denn $6=2+2+2$. Es ist daher gleichbedeutend zu sprechen 2 kann 3 Mahl von 6 weggenommen werden oder 2 ist 3 Mahl in 6 enthalten; oder 6 kann durch 2 drei Mahl getheilt werden. Das Zeichen ist: welches zwischen der **Hauptzahl** (Theilungszahl) und dem Theiler gesetzt wird; oder ein Querstrich, über welchem die Hauptzahl, und unter welchem der **Theiler** steht. Z. B. nach ersterer Art $2:6=3$; nach der andern $\frac{6}{2}=3$. Die Zahl 3 ist die gesuchte **Summe** oder der Quotient (der Wievielmahl).

Anm. Wir glauben, auch hier das Wort Summe wieder gebrauchen zu dürfen, weil 3 wirklich die Summe (die Gesammtzahl) enthält, wie oft 2 in 6 enthalten ist, nähmlich $1+1+1$ Mahl $=3$ Mahl; und weil wir die Anhäufung solcher Kunstausdrücke, besonders aus fremden Sprachen entlehnter, möglichst vermeiden müssen.

§. 41.

a) Ansatz und Verfahrungsweise beim Dividiren.

Man schreibt in die Mitte die Haupt- oder Theilungszahl, zur Linken derselben den Theiler, und

zur Rechten die Summe, alle drei durch zwei senkrechte Striche getrennt. Z. B.

2 | 6 | 3

Die Verfahrungsweise bei einfachen Zahlen ist, daß sogleich die Probe beigefügt wird. Z. B.

2	6	3
	6	
	0	

Sprich: 2 in 6 habe ich 3 Mahl, denn 2 × 3 = 6 (welche Zahl unter die Hauptzahl geschrieben wird) und 6 von 6 geht auf, oder es bleibt (Keiner) nichts weiter zu theilen übrig.

Bei mehrfachen Grundzahlen z. B. 26 verfährt man auf gleiche Weise, und fängt die Theilung entweder mit den Einern oder mit den Zehnern an. Im letztern Falle wird mithin auf die Weise verfahren, daß man spricht:

2	26	10
		3
		13

2 : 2 Zehnern habe ich 1 Mahl Zehn, (10); 2 : 6 Einern = 3 Mahl, welche Summe unter der Keins geschrieben werden muß, weil es hier von Theilen einer Zahl der ersten Ordnung handelt. Um aber das Addiren beider Summen zu vermeiden, wird dieß Verfahren nur anfänglich deswegen vorgenommen, damit die Schüler sich

daran

daran gewöhnen, auch hierbei mit klarer Besonnenheit zu Werke zu gehen, und Rechenschaft von ihrem Handeln ablegen können.

Im erstern Falle wird die Summe der ersten Theilungszahl so gesetzt, daß die Summe der zweiten die ihr gebührende höhere Stelle einnehmen kann. Z. B.

$$\begin{array}{r|c|l} 2 & 26 & 3; \\ & 6 & \\ \hline & 0 & \end{array} \quad \text{und dann} \quad \begin{array}{r|c|l} 2 & 26 & 13 \\ & 2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Um aber die Schüler selbst darauf zu leiten, welche Verfahrungsweise vorzuziehen sey, gebe man ihnen 36 zur Theilung mit 2 auf, wobei ihnen 10 zur weitern Theilung noch nachträglich übrig bleibt. Z. B.

$$\begin{array}{r|c|l} 2 & 36 & 3; \\ & 6 & \\ \hline & 0 & \end{array} \quad \text{dann} \quad \begin{array}{r|c|l} 2 & 36 & 13 \\ & 2 & \\ \hline & 10 & \end{array} \quad \text{und dann}$$

noch nachträglich $2:10=5+13=18$. Dieser Nachtrag fällt aber weg, wenn bei den Zahlen der höhern Ordnung angefangen wird. Z. B.

$$\begin{array}{r|c|l} 2 & 36 & 18 \\ & 2 & \\ \hline & 16 & \\ & 16 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Sprich: $2:3=1$ Mahl; $1\times2=2$ (welches unter die Theilungszahl 3 gesetzt wird); $2-3=1$; zu diesem 1 Zehner zieht man die 6 Einer herab, und spricht nun weiter: $2:16=8$; $2\times8=16$; $16-16=0$.

§. 42.

b) Aufgaben mit unbenannten Zahlen.

1) Zuerst läßt man die Schüler die Divisionsübungen in systematischer Folge schriftlich für sich vornehmen, wie solche §. 48 — 51 des ersten Kursus angegeben sind.

2) Hierauf folgen einige Aufgaben mit Resten z. B. 3 : 7; 6 : 14; 7 : 22; 12 : 26; um sie mit Entstehung der Theilzahlen auf folgende Weise bekannt zu machen. 3:7=2; 2×6=6; 6—7=1 Rest. Dieser Rest muß durch 3 weiter getheilt werden; 3 : $\frac{3}{3}$ (drei Drittel habe ich) $\frac{1}{3}$. Erläutert wird diese Aufgabe weiter durch Annahme, daß 7 Aepfel unter 3 Knaben zu theilen seyen. Davon würde folglich jeder 2 Aepfel erhalten, und 1 bliebe übrig. Um auch diesen weiter unter ihnen theilen zu können, muß er in 3 Drittel zerstückt werden, wovon jeder $\frac{1}{3}$ erhält.

3) Größere Aufgaben mit a) einem einfachen Theiler z. B.

```
3 | 86562 | 28854
    6....
    -----
    26...
    24...
    -----
     25..
     24..
     ----
      16.
      15.
      ---
       12
       12
       --
        0
```

Sprich:

Sprich: 3:8=2 Mahl; 2×3=6; 6—8=2; dazu die nachfolgende Zahl 6 herabgezogen, gibt 26. 3:26 =8; 3×8=24; 24—26=2; 20+5=25; 3:25 =8; 3×8=24; 24—25=1; 10+6=16; 3:16 =5; 3×5=15; 15—16=1; 10+2=12; 3:12 =4; 4×3=12; 12—12=0.

Mehrere dergleichen Aufgaben können die Schüler selbst erfinden.

b) Mit mehrfachen Theilern.

Z. B. 15:76529. 24:873984. 49:152793. 123:897. 225:20755. 1230:49230.

Bei der schriftlichen Auflösung dieser Aufgaben wird auf folgende Weise verfahren

```
15 | 76529 | 5101 14/15
   | 75... |
   -----
     15..
     15..
     ----
      029
       15
      ---
       14
      ---
       15
```

Anm. Die Hauptkunst des Rechners bei mehrzahligen Theilern besteht darin, schnell und richtig anzugeben, wie oft solcher in einer Zahl enthalten ist. Er muß daher eine Gewandheit haben, den Theiler so oft zu multipliziren, bis er eine Summe erreicht, welche die Theilungszahl wo nicht erschöpft, doch

ihr

ihr am nächsten kommt. In obigen Beispielen ist $5 \times 15 = 75$ der Theilungszahl 76 sehr nahe; 24 von 84 nur 3 Mahl abzuziehen, weil $3 \times 24 = 72$, und $72 - 84 = 12$; $49 : 150$ nur 3 Mahl, weil $3 \times 49 = 50 \times 3 \, (= 150) - 3 \times 1 = 147$. $123 : 897$ nur 7 Mahl, weil $7 \times 125 = 875 - 2 \times 7 = 861$, und $861 - 897$ nur 36 bleibt, warum 123 nicht noch ein Mahl mehr hinweggenommen werden kann. $225 : 2075$ 9 Mahl weil $9 \times 200 = 1800$; 9×25 $(\frac{25}{100} = \frac{1}{4}) = 225$; $1800 + 225 = 2025$ ist. $1230 : 4923$ 4 Mahl, weil $4 \times 1000 = 4000$; $4 \times 200 = 800$; $4 \times 30 = 120$; $4000 + 800 + 120 = 4920$ ist.

§. 43.

c) Aufgaben mit Theilern, an deren Ende sich Keiner befinden.

1) Wenn der Theiler am Ende Keiner hat, kann man sich das öftere Anschreiben der Keiner ersparen, (weil man mit diesen nicht dividirt) und daher so viele Ziffern von der Theilungszahl abschneiden, als der Theiler Keiner hat. Um die Schüler auf den Grund dieser Abkürzungsweise zu führen, gibt man ihnen einige Beispiele, wie die folgenden auf, die sie zuerst ohne Abschneidung der Keiner, und dann mit Abschneidung derselben schriftlich berechnen müssen. Es sind z. B. unter 20 Knaben 6732 und unter 300 Knaben 8842 Nüsse zu vertheilen, und man will wissen, wie viele davon jeder zu erhalten hat.

20	6732	336 Nüſſe	2(0	673(2	336 Nüſſe
	60..			6...	
	73.			7..	
	60.			6..	
	132			13	
	120			12	
	12 übrig			12 übrig	

300	8842	29 Nüſſe	3(00	88(42	29
	600.			6...	
	2842			28..	
	2700			27..	
	142 übrig			142 übrig	

§. 44.

d) Aufgaben, deren Theilungszahlen und Theiler zugleich Nuller am Ende haben.

Man laſſe mit folgendem kleinen Beiſpiele anfangen. 20 Knaben haben ſich in 80, oder in 100 Nüſſe zu theilen

20	80	4 oder kürzer	2(0	8(0)	4
	80			8	
	00			0	

400 Knaben haben ſich in 75600 Kreuzer zu theilen

400	75600	189 oder kürzer	4(00	756(00	189
	400..			4....	
	3560.			35...	
	3200.			32...	
	3600			36	
	3600			36	
				0	

§. 45.

e) Proberechnungsweise.

Um sich vermittelst einer andern Rechnungsart von der Richtigkeit der Lösung einer Divisions-Aufgabe zu überzeugen, darf nur die Summe mit dem Theiler multiplizirt werden, um die Theilungssumme wieder zu erhalten. Denn wenn 2 Knaben von 6 Aepfel jeder 3 erhält, und sie werfen diese erhaltene Antheile zusammen, so gibt dieß wieder 6 Aepfel. 2:6=3 denn 2×3=6. — Hiernach ist auch die Probe mit obigen Beispielen anzustellen.

Bei dieser Gelegenheit sind die Schüler auf die Bemerkung zu leiten, daß 1) folglich auch die Division die Probe richtiger Rechnung bei einer Multiplikazions-Aufgabe sey; 2) daß die Summe zum Theiler verwendet, eine Summe geben müsse, die dem ersten Theiler gleich sey. Z. B.

2:12=6; 6:12=2.

§. 46.

f) Erleichterungsweise beim Dividiren.

Bei größern Divisions-Aufgaben kann man sich solche öfters dadurch sehr erleichtern, daß man den Theiler in seine Vervielfältigungszahlen zerlegt, und mit diesen letztern die Division vornimmt. Z. B. der Theiler 6 kann in die Vervielfältigungszahlen 2 und 3 zerlegt werden, denn 2×3=6. Es ist daher einerlei, ob man eine

eine Theilungszahl z. B. 24 mit 6 oder mit 2 und die gefundene Summe hierauf noch mit 3 dividirt.

6 = 2 ⋊ 3

| 24 | 12 | 4.

Bleiben etwa dabei Reste übrig, so zeigt sich solches auf folgende Weise: a) bei der ersten Divisions-Vornahme:

6 = 2 ⋊ 3

| 25 | 12 | 4
| 24 |

1 Rest

b) Bei der zweiten:

6 = 2 ⋊ 3

| 28 | 14 | 4
| | 12 |

2 ⋊ mit dem ersten Divisor 2 = 4 Rest.

Als weitere Uebungsausgaben stehen hier: a) 9 in 3 ⋊ 3 zerlegt, und damit in 888 dividirt; b) 27 in 3 ⋊ 9 zerlegt, und damit in 365 dividirt.

Hiervon läßt sich, wenn man will, bei größern Zahlen ein zweckmäßiger Gebrauch machen. Z. B. bei der fünften Aufgabe des vorigen §. mit dem mehrfachen Theiler 225, welcher = 9 ⋊ 29.

$225 = 25 \times 9$

| 2075 | 83 | 9
| | 81 |

$2 \times 25 = 50$ Rest.

§. 47.

g) Aufgaben mit benannten Zahlen.

1) Wenn man mitten durch die Erdkugel eine Linie zieht, so ist diese 1720 Meilen lang. Es fragt sich: wie groß die Hälfte dieser Linie bis zum Mittelpunkte der Erde sey?

2) Eine Erbschaft von 13,461 Gulden (oder Thalern) soll unter 3 Erben getheilt werden; wie viel bekommt jeder?

3) Jedes Schaltjahr kann durch 4 ohne Rest getheilt werden. Z. B. 1816; es fragt sich, ob das jetzt laufende auch ein Schaltjahr sey oder nicht?

4) 5 Geschwister haben sich in ein Vermögen von 100,000 Gulden zu theilen; wie viel bekommt jedes?

5) Aus wie vielen Wochen besteht das Jahr, welches 365 Tage zählt?

6) Unter 9 abgebrannte Familien sollen 4788 Gulden gleich vertheilt werden; wie viel bekommt jede?

7) Der Durchmesser der Sonne beträgt 192,640 Meilen; es fragt sich, wie oft der Durchmesser der Erde in ihm enthalten sey?

8) In 25 Jahren gelangt eine fliegende Kanonenkugel zur Sonne; in 690,000 Jahren zum Sirius, dem

uns

uns nächsten Fixsterne. Es fragt sich nun, wie viel Mahl der Sirius von uns weiter als die Sonne entfernt sey?

9) Ein Elephant wiegt gegen 5000 Pfund; wie viel Zentner, wenn der Zentner 100 Pfund enthält?

10) Ein Mensch von mittler Schwere wiegt ohngefehr einen Zentner; wie viele gehören dazu, um dem Elephanten das Gleichgewicht zu halten?

11) Eine Schulgemeinde von 176 Familien soll den Bau eines Schulhauses mit 2464 Gulden übernehmen; was hat jede zu gleichen Theilen beizutragen?

12) Die Erdkugel hat 5400 Meilen im Umfange; dieser Umfang wird in 360 Grade eingetheilt; wie viele Meilen kommen also auf einen solchen Grad?

13) Wenn ein Reich 3 Millionen Einwohner oder (5 Personen auf eine Familie gerechnet) 600,000 Familien und 60,000 Mann Soldaten zählt, auf wie viele Einwohner und Familien kommt 1 Soldat? (50 und 5.)

§. 48.

h) Schlußbemerkung über das Dividiren.

Jede Divisions-Aufgabe kann auch als eine Aufgabe mit Theilzahlen angesehen werden. Der Theiler wird dann zum Theilganzen, und das Theilungsganze zur Theilzahl gemacht. Z. B. 4 Knaben erhalten 1 Apfel, um ihn unter sich zu theilen. Statt die Aufgabe mit 4 : 1 anzusetzen, kann sie gleich durch $\frac{1}{4}$ ausgedrückt werden, weil der Apfel, um ihn unter 4 Personen theilen

len zu können in 4 Theile getheilt werden, wovon jede Person einen Theil erhält.

Wenn 3 Knaben 2 Aepfel zum theilen bekommen, so erhält jeder $\frac{2}{3}$; 3 Knaben: 3 Aepfel $\frac{3}{3}$ oder 1 Ganzen; 4 Knaben: 2 Aepfel $=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; 5 Knaben: $2=\frac{2}{5}$; $3:4 =\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$; $3:5=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$; $8:100=\frac{100}{8}=12\frac{4}{8}=12\frac{1}{2}$. Von welchen Beispielen die Schüler aber den Grund deutlich aufzufassen haben.

IV. Vom Zifferrechnen mit Theilzahlen.

1. Ponderiren.

§. 49.

a) Von Vergrößerung und Verkleinerung der Theilzahlen.

Eine jede Theilzahl kann vergrößert oder verkleinert werden, je nachdem das Theilganze in wenigere oder mehrere Theile getheilt wird. Damit die Schüler selbstthätig zur Erkenntniß dieses Satzes geleitet werden, gebe man ihnen auf, eine Linie von beliebiger Größe zu ziehen, und diese

in

in vier gleiche Theile abzutheilen. Man frage sie nun, was erstlich geschehen würde, wenn sie die Zahl der Theile, aus welchem das Theilganze hier besteht, um die Hälfte verminderten. Ihre Antwort, daß dann jedes Zweitel noch ein Mahl so groß seyn würde, als ein Viertel, gibt weiter Gelegenheit, sie durch Fragen zur Wahrnehmung hinzuleiten, daß man, um eine Theilzahl zu vergrößern, nichts anderes zu thun habe, als das Theilganze zu vermindern, d. h. in weniger Theile zu theilen, als solches vorher hatte. Daraus lasse man sie den Folgesatz ableiten, daß jede Theilzahl, die einem mehrtheiligen Theilganzen angehöre, kleiner sey, als jede andere, die einem geringtheiligteren Ganzen angehört. $\frac{1}{10}$ ist weniger als $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}$ weniger als $\frac{1}{8}$ u. s. w.

Eben so leite man sie durch die Frage, was der Erfolg seyn würde, wenn das vorige Vierviertel zu einem Drittel- oder Zweitel-Ganzen verringert wurde, auf die Wahrnehmung, daß die Theilzahlen in gleichem Grade vergrößert werden, mithin $\frac{1}{2}$ mehr ist als $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ mehr als $\frac{1}{4}$; eben so auch $\frac{2}{4}$ mehr als $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}$ mehr als $\frac{2}{6}$; $\frac{3}{5}$ mehr als $\frac{3}{7}$ u. s. w.

Im Gegentheile werden auch die Theilzahlen verkleinert d. i. in kleinere Theile umgeschaffen, in je mehrere Theile das Ganze getheilt wird.

Anm. 1. Wer will, kann auch diesen Hauptsatz an 10 gleich großen, ein- bis zehntheilig gemachten Linien auffinden lassen, wie im ersten Kursus geschah. Hier handelt es aber nur hauptsächlich davon, an die Ziffern die richtige Begriffe anzuknüpfen, die

schon

schon als Erzeugnisse des ersten Kursus vorausgesetzt werden. Es muß daher dem Gutfinden des Lehrers überlassen werden, wie weit seine Schüler auf das frühere zurückzuführen sind.

2. Das Ermessen, um wie viel eine Theilzahl größer oder kleiner als die andere sey, folgt unten. Nach einem genau abzumessenden Stufengange ist zum Anfange schon genug gethan, wenn die Schüler im Allgemeinen die Ueberzeugung von obigem Hauptsatze klar auffassen.

3. Nicht ohne Nutzen ist es, hierbei die Schüler auf die Wahrnehmung zu leiten, daß das Theilganze sich gleich bleibt, wenn es auch in noch so viele Theile getheilt wird; und daher $\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=\frac{7}{7}=\frac{8}{8}=\frac{9}{9}=\frac{10}{10}$.

§. 50.

b) Vom Gleichbleiben der Theilzahlen.

Theilzahlen bleiben sich am Werthe gleich, wenn sie mit dem Theilganzen gleiche Veränderung erleiden.

Auch zur Auffassung dieses Hauptsatzes sind die Schüler selbstthätig an einer Linie auf obige Weise zu leiten; worauf sie folgende systematische Zifferreihen von gleichbleibenden Theilzahlen zu entwerfen haben:

a) Durch fortschreitende Verdoppelung beider Zahlen

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\frac{16}{32}=\frac{32}{64}=\frac{64}{128}=\frac{128}{256}=\frac{256}{512}$ u. s. w.

$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{16}{24}=\frac{32}{48}=\frac{64}{96}=\frac{128}{192}=\frac{256}{384}$

$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=\frac{24}{32}=\frac{48}{64}=\frac{96}{128}=\frac{192}{256}=\frac{384}{512}$

Anm.

Anm. Es ist an sich nicht nöthig, diese Reihen weiter ausführen, noch auch sie durch neue Reihen von $\frac{4}{5}$ bis $\frac{9}{10}$ vermehren zu lassen, es müßte denn in der Absicht geschehen, die Schüler überhaupt im Rechnen für sich zu üben, weil obige Aufgaben hinreichend sind, die Wahrheit des Hauptsatzes aufzufassen.

b) Durch fortschreitende Verdreifachung beider Zahlen:

$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{6} = \frac{9}{18} = \frac{27}{54} = \frac{81}{162} = \frac{243}{486}$ u. s. w.

Anm. Auch hier gilt das oben gesagte. — Daß auf gleiche Weise die Zahlen auch mit demselben Erfolge vervierfacht, verfünffacht werden können, wird nicht erst bemerkt werden dürfen.

c) Durch bloße fortschreitende Addition der Grundzahl:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} = \frac{7}{24} = \frac{8}{32} = \frac{9}{36} = \frac{10}{40}$.

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{26} = \frac{5}{25} = \frac{6}{30} = \frac{7}{35} = \frac{8}{40} = \frac{9}{45} = \frac{10}{50}$.

Anm. 1. Diese Reihen folgen von $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{10}$, so wie von $\frac{2}{5}$ bis $\frac{9}{10}$ können von den Schülern vollständig ausgebildet werden. Nur versäume man nicht, um sie vor einem mechanischen Handeln zu bewahren, ihnen öfter den Grund ihres Verfahrens abzufragen. Z. B. warum ist $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$? (weil $\frac{2}{8}$ auch der vierte Theil eines Theilganzen ist) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$? (wenn man die Theile des ersten Theilganzen halbirt, so erhält man ein Sechstelganzes; wovon $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, und $2 \times \frac{1}{3} = 2 \times \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$).

2. Zum Schlusse mache man seine Schüler darauf aufmerksam, daß die Theilzahlen sich auch gleich-

blei-

bleiben, wenn sie auf gleiche Weise fortschreitend vermindert werden.

§. 51.

e) Vom Auffinden der geringsten Benennung einer größern Theilzahl.

Vieltheilige Theilzahlen lassen sich zum Theil auf wenigtheilige von gleicher Größe zurückbringen, wie so eben den Schülern am Schlusse des vorigen §. nachgewiesen wurde. Die größte Kunst dabei besteht darin, die geringste Theilzahl jeder größern aufzufinden, die dieser an Größe gleich bleibt. Bei den Aufgaben $\frac{8}{32}$, $\frac{48}{96}$, $\frac{120}{360}$ ist sie leicht auszuüben, weil 8 der vierte Theil von 32, 48 die Hälfte von 96, und 120 der dritte Theil von 360 ist, mithin $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ die gesuchten geringsten Benennungen jener mehrtheiligen Theilzahlen enthalten.

Nach der verschiedenen Natur der Zahlen ist aber dieß nicht immer möglich. Z. B. $\frac{3}{4}$ läßt sich nicht durch eine geringere Zahl ausdrücken; wohl aber $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{12}$ rc. Der Grund liegt in der doppelten Beschaffenheit der Zahlen, wovon einige gleichtheilig, die andern ungleichtheilig sind. Das heißt, einige können in gleiche Theile zerlegt werden wie z. B. 4 (=2+2), 6 (=3+3), 8 (4+4), 9 (=3+3+3), 10 (=5+5) 12 (=6+6 oder 4+4+4 oder 3+3+3,3) u. s. w. Andere Zahlen aber heißen ungleichtheilig, weil sie, mit Weglassung der Eins, als des Urelementes aller Zahlen, in keine gleichen Theile zerlegt werden können. Dahin

hin gehören 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 u. s. w.

Anm. Daß die Schüler diese Zahlen selbst auffinden müssen, dürfen die Lehrer nicht aus der Acht lassen.

Sind die *Theilzahlen* und die *Theilganzen zugleich* ungleichtheiliger Natur, wie z. B. $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{13}$, so haben beide keinen gemeinschaftlichen Theiler als 1, und können daher nicht durch eine geringere Benennung ausgedrückt werden. Eben dieß ist der Fall, wenn sie keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ob sie schon entweder beide, oder eine Größe davon zu den gleichtheiligen gehören. Z. B. $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{29}{36}$.

In kleinern Zahlen können die Theilgrößen ausgedrückt werden:

a) Wenn die Zahl der Theile sowohl als des Theilganzen zu den geraden Zahlen gehört, durch die Zahl zwei. Z. B. $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{10}{14}$. Auf welche Weise? und warum?

b) Wenn die Zahl der niedrigsten Ordnung in eine Zahlenreihe 5 oder 0 ist, durch 5. Z. B. $\frac{35}{15} = \frac{7}{3}$; $\frac{25}{70} = \frac{5}{14}$. Warum? (Im ersten Falle, weil die Einheitszahl 5 durch sich selbst gehoben wird, die Zehner aber aus 5 + 5 bestehen; im zweiten Falle aber, weil nur Zehner vorhanden sind).

c) Wenn die Theilzahlen und die Theilgrößen zugleich am Ende Keiner haben, in welchem Falle nur eine gleiche Anzahl von beiden weggestrichen werden darf. Z. B. $\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$; $\frac{200}{1000} = \frac{2}{10}$.

d) Wenn die Theilzahl und das Theilganze einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Letzteres kann nur bei kleinern Zahlen leicht erkannt werden. Z. B. $\frac{8}{12}$ haben 4, $\frac{6}{15}$ und $\frac{9}{21}$ 3 zum gemeinschaftlichen Theiler, und lassen sich dadurch in die geringste Theilzahl $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$ verwandeln.

Bei größern Theilzahlen findet eine doppelte Verfahrungsweise statt. 1) Entweder wird die Theilung mit kleinen Theilern so lange vorgenommen, bis man zu der kleinsten Benennung kommt, z. B. $\frac{108}{120} \overset{2}{|} \frac{54}{60} \overset{2}{|} \frac{27}{30} \overset{3}{|} \frac{9}{10}$ wobei man durch die Division mit 2 + 2 + 3 endlich zu der kleinsten Theilzahl $\frac{9}{10}$ gelangt. 2) Oder es wird zur Auffindung dieser letztern folgende Entdeckungsweise angewendet.

Die Aufgabe sey die vorige. Es soll also die Theilzahl $\frac{108}{120}$ in die möglichste kleinste (dem Nahmen nach, und in die größte der Sache nach) verwandelt werden.

Die Auflösung wird dadurch bewerkstelliget, daß man a) mit der Theilzahl in das Theilganze dividirt; b) mit dem erhaltenen Rest wieder in die Theilzahl; c) bleibt dann kein Rest weiter, so ist der vorige Rest der gemeinschaftliche Theiler, wodurch beide Größen (die Theilzahl und das Theilganze) auf die kleinste Benennung gebracht werden können. Dem gemäß wird die Aufgabe auf folgende Weise gelöst:

$$\begin{array}{r|l} 108 : 120 & 1 \text{ Mahl} \\ 108 & \\ \hline 12 \text{ Rest} : 108 & 9 \\ 108 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Mithin ist der gemeinschaftlich größte Theiler $12 \left| \frac{108}{120} \right| \frac{9}{10}$

Beweis: $120 = 108 + 12$; wenn nun
$12 : 108 = 9 \times 12$ so ist
$12 : 120 = 10 \times 12$ mithin

$\frac{9}{10}$

die kleinste Benennung der Theilgröße $\frac{108}{120}$.

§. 52.

Fortsetzung.

Sollte bei dieser Auffindungsweise, nach der zweiten Division ein weiterer Rest verbleiben, so wird mit diesem wieder in den vorhergehenden weiter dividirt, und damit so lange fortgefahren, bis es sich zeigt, durch welchen Theiler sich beide Zahlen ohne Rest theilen lassen. Z. B. die Schüler sollen die kleinste Benennung der Theilgröße $\frac{119}{153}$ finden.

$$\begin{array}{r|l} 119 : 153 & 1 \\ 119 & \\ \hline 34 : 119 & 3 \\ 102 & \\ \hline 17 : 34 & 2 \\ 34 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

Mit-

Mithin ist der gemeinschaftliche größte Divisor die Zahl 17; denn 17 : $\frac{119}{153}$ gibt $\frac{7}{9}$.

Beweis: 17 : 34 | 2; 34 : 102 : | 3; folglich 17 : 102 | 6; und 17 : 119 (= 102 + 17) | 7 Mahl.
153 = 119 + 34; 17 : 34 | 2; 2 + 7 = 9 Mahl folglich $\frac{7}{9}$.

Eine andere Aufgabe, die ein noch längeres Verfahren nöthig macht, ist die kleinste Benennung der Theilzahl $\frac{119}{154}$ zu finden.

Aber nicht alle Theilzahlen lassen sich auf eine kleinere Benennung bringen, sondern führen bei diesem Verfahren nur auf das Urelement aller Zahlen auf die Eins zurück. Eine dergleichen Aufgabe ist z. B. $\frac{119}{155}$, welcher keine weitern beigegeben werden, weil die Schüler solche von selbst auffinden können, wenn man ihnen aufgibt, den Versuch mit mehreren Theilzahlen zu machen, um zu sehen, ob solche sich in größere Theilgrößen verwandeln lassen, oder nicht.

§. 53.

d) Von Gleichnahmigmachung der Theilzahlen.

Nur Gleiches kann mit Gleichem verbunden, und von Gleichem genommen werden. Um seine Schüler aufs Neue zur Erkenntniß der Wahrheit dieses Satzes zu führen, erinnere man sie daran, daß man z. B. 1 Apfel und 2 Birnen nicht addiren und sagen könne, die Summe betrage 3 Aepfel oder drei Birnen; und daß sich eben so wenig 1 Apfel von 2 Birnen

weg=

wegnehmen lasse. Wollte man gleichwohl beides vollziehen, so müssen vorher erst beide Zahlen gleichnahmig gemacht werden. Z. B. 1 Obststück und 2 Obststücke sind 3 Obststücke, mögen diese übrigens verschiedenen Obstgattungen zugehören.

Derselbe Grundsatz finde auch bei verschiedennahmigen Theilzahlen statt. Man kann z. B. 1 Drittel 3 Viertel nicht eher addiren, bis man sie gleichnahmig gemacht hat.

Man zeichne hierauf zwei gleich große Linien an die schwarze Tafel, davon die eine in 2 und die andere in 4 Theile getheilt wird. Um nur $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ addiren zu können, fordere man seine Schüler auf, selbst die Art aufzufinden, wie man beide Theilzahlen gleichnahmig machen könne. Ohne Beihülfe des Lehrers werden sie ohne Zweifel selbst bemerken, daß man die erste Linie ebenfalls in 4 Theile theilen müsse, wodurch die Theilzahl $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$ verwandelt wird, die mit $\frac{1}{4}$ zusammen $\frac{3}{4}$ beträgt.

Diese Verfahrungsart, wobei die den Namen nach kleinere (in der That aber größere) Theilzahl in so viele Theile weiter zerlegt wird, als deren die größere enthält, findet jedoch nur bei solchen Zahlen statt, deren Theilganze um eine bestimmte Zahl noch ein Mahl so groß als die andere ist, wie z. B. Zweitel, Viertel, Sechstel, Achtel ꝛc. oder Drittel, Sechstel, Zwölftel, Fünfzehntel ꝛc. Bei andern Theilganzen, davon die eine nicht um eine bestimmte Zahl größer als die andere ist, wie z. B. $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ muß eine andere Regel aufgefunden werden, die alle Theilzahlen umfaßt, und die also lautet:

Theile jeden Theil eines Theilganzen in eben so viele Theil weiter, als das andere Theilganze Theile zählt.

Theilen die Schüler dieser Regel zu folge jedes Drittel eines Drittelganzen in 4 Theile, so wird das Ganze nunmehr 12theilig (ein Zwölftelganzes); und so auch gegenseitig jedes Viertel des Viertelganzen in 3 Theile, so wird auch das Viertelganze in ein Zwölftelganzes verwandelt. Von diesem zwölftheiligen Ganzen beträgt $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ und $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$; $\frac{4}{12} + \frac{3}{12}$ aber sind zusammen $\frac{7}{12}$.

Anm. Um nicht zu weitläufig zu werden, hat man hier unterlassen, in Unterredungsform nachzuweisen, wie auch hier die Schüler nach der bildenden Lehrweise zur selbstthätigen Auffassung dieser Regel geleitet werden müssen, und bemerken daher hier nur für Lehrer, welche in derselben noch keine volle Fertigkeit erlangt haben, daß sie wohl thun werden, wenn sie hierüber sich vorher ein Lehrgespräch entwerfen, ehe sie diesen Unterricht selbst mündlich mit ihren Schülern vornehmen.

§. 54.

e) Aufgaben mit 2 ungleichnahmigen Theilzahlen.

Es sind folgende Theilzahlenpaare gleichnahmig zu machen:

$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$; denn $2 \times 3 = 6$; und von $\frac{6}{6}$ ist die Hälfte $= \frac{3}{6}$ und das Drittel $= \frac{2}{6}$.

$\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$ u. s. w. bis $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.

$\frac{1}{3} +$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ u. s. w.
$\frac{2}{3}+\frac{2}{4}$: $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$ u. s. w.
$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}+\frac{2}{6}$ u. s. w.
$\frac{1}{6}+\frac{2}{7}$; $\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$ u. s. w.
$\frac{1}{7}+\frac{2}{8}$; $\frac{2}{7}+\frac{3}{8}$ u. s. w.
$\frac{1}{8}+\frac{3}{9}$; $\frac{2}{8}+\frac{4}{9}$ u. s. w.
$\frac{1}{9}+\frac{2}{10}$; $\frac{2}{9}+\frac{3}{10}$ u. s. w.

Anm. 1. Bei dieser Gelegenheit sind die Schüler zugleich auf das abkürzende Verfahren, mit Nachweisung des Grundes, aufmerksam zu machen, wodurch vorher Theilzahlen in größere (dem Gehalte nach) z. B. $\frac{2}{4}$ in $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{6}$ in $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{8}$ in $\frac{1}{4}$ verwandelt werden können. Es sollen dem gemäß a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{4}$; b) $\frac{2}{6}$ und $\frac{2}{7}$; c) $\frac{1}{7}$ und $\frac{2}{8}$ gleichnahmig gemacht werden. Dadurch erhält man bei a) ein Sechstelganzes statt ein Zwölftelganzes (denn $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; mithin $2 \times 3 = 6$, wovon die Theilzahlen betragen $\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{7}{6}$); bei b) ein 21theiliges Ganze statt ein 42theiliges; und bei c) ein 28theiliges nur statt ein 56theiliges.

2. Man läßt die Schüler, nachdem von ihnen das gleichnahmige Theilganze gefunden wurde, anfänglich das Zweitel, Viertel, Siebentel rc. selbst durch Nachdenken aufsuchen. Sind sie aber darin zu einiger Fertigkeit gelangt, werden sie zu der Bemerkung hingeleitet, daß sie dieß weit leichter bewerkstelligen könnten, wenn sie jede Theilzahl mit dem Theilganzen der andern Theilzahl multipliziren würden, weil ja jeder Theil des einen Theilganzen so oft weiter zerlegt worden sey, als das andere Theilganze Theile in sich enthält. Z. B. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

gibt zum gleichnahmigen Theilganzen 8, weil jedes der zwei Zweitel in 4 Theile weiter getheilt worden sey. Mithin zeige 1×4 schon die neue dem $\frac{1}{2}$ gleiche Theilzahl $\frac{4}{8}$ an; und eben so auch 1×2 die zweite neue dem $\frac{1}{4}$ gleiche Theilzahl $\frac{2}{8}$. — Alles dieß läßt sich den Schülern durch Linien nöthigenfalles noch anschaulicher machen, wenn ihre Denkkraft noch nicht hinreichend befähigt seyn sollte, diese Auflösung rein aufzufassen.

3. Wer will, kann seinen Schülern auch einige mehrzählige Theilzahlen gleichnahmig machen lassen, z. B. $\frac{31}{36}$ und $\frac{46}{102}$; man hat sie aber hier deswegen übergangen, weil in der Folge dergleichen Aufgaben zur Auflösung vorkommen, und man mit der Jugend nur allmählig vom Leichten zum Schweren fortschreiten muß.

§. 55.

f) Aufgaben mit 3 Theilzahlen.

Es sollen folgende Theilzahlen gleichnahmig gemacht werden:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

Hierbei ist das erste Theilganze (3) mit dem zweiten (4) und das Produkt aus beiden (12) mit 5 als dem dritten Theilganzen zu multipliziren, wodurch 60 als das gleichnahmige Ganze gewonnen wird. $\frac{1}{3}$ von $60 = \frac{20}{60}$; $\frac{1}{4}$ von $60 = \frac{15}{60}$; und $\frac{1}{5}$ von $60 = \frac{12}{60}$; denn $1 \times 4 \times 5 = 20$; $1 \times 3 \times 5 = 15$; $1 \times 4 \times 3 = 12$.

Wei-

Weitere Aufgaben dieser Art, die entweder vom Lehrer oder den Schülern selbst noch vermehrt werden können, sind folgende.

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5} = \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{36}{60}$ denn $3 \times 4 \times 5 = 60$; und $2 \times 4 \times 5 = 40$ Sechzigtel; $3 \times 5 \times 3 = 45$ Sechzigtel, und $3 \times 4 \times 3 = 36$ Sechzigtel.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8} = (2 \times 5 = 10 \times 8 = 80)\ \frac{40}{80}, \frac{16}{80}, \frac{10}{80}$.

$\frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8} = (3 \times 7 \times 8 = 168) = \frac{112}{168}, \frac{24}{168}, \frac{63}{168}$.

Anm. Auch hier mache man sogleich die Schüler auf die abkürzende Verfahrungsweise, und deren Grund, bei denjenigen Rechnungsaufgaben aufmerksam, wo eines der Theilganzen in dem Produkte der übrigen aufgeht. Z. B. in der vorletzten Aufgabe bilden die beiden Theilganzen 5 und 8 das Produkt 40, in welches das erste Theilganze 2 ohne Rest dividirt werden kann. Anstatt folglich durch Multiplicazion 80 als das gleichnahmige Theilganze zu gewinnen, bleibt man bei 40, wovon die Hälfte 20, das Fünftel 8 und das Achtel 5 ist; $\frac{20}{40}$ sind aber gleich $\frac{40}{80}$; $\frac{8}{40} = \frac{16}{80}$ und $\frac{5}{40} = \frac{10}{80}$. Geht ein Theilganzes in dem Produkte der andern Theilganzen nicht auf, so kann letzteres folglich auch für das erstere nicht als ein gemeinschaftliches Theilganze gelten.

§. 56.

g) Mit mehreren Theilzahlen.

Hierbei kann zur Erleichterung des Geschäftes die zuletzt angezeigte Abkürzungsweise angewendet wer-

den. Es sey z. B. die Aufgabe, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$ unter gemeinschaftliche Benennung zu bringen. Die drei letzten Theilganzen geben durch Multiplikazion ($5 \times 6 = 30 \times 8 =$) 240, in welche die übrigen beiden Theilganzen 3 und 4 ohne Rest dividirt werden können. Es ist daher 240 als das gemeinschaftliche Theilganze anzunehmen, wovon 2 Drittel 160 betragen, 3 Viertel = 180, 2 Fünftel = 96, 5 Sechstel = 200, und 3 Achtel = 90. Die schriftliche Ansatzweise ist folgende:

80	$\frac{2}{3}$	160
60	$\frac{3}{4}$	180
48	$\frac{2}{5}$	96
40	$\frac{5}{6}$	200
30	$\frac{3}{8}$	90. 200. 96. 180. 160.

$8 \times 6 = 48 \times 5 =$ . . 240 das gemeinschaftliche

Theilganze, welches durch Multiplikazion der drei Zahlnamen $5 \times 6 \times 8$ entstanden ist. Die zur linken Hand gesetzten Zahlen zeigen an, wie viel der einfache Theil eines jeden Theilganzen beträgt. Ein Drittel von 240 ist ($3 : 240 =$) 80. Zwei solche Drittel ($2 \times 80 =$) betragen $\frac{160}{240}$, welche Zahl auf die rechte Seite geschrieben wird. Ein Viertel von 240 ist 60, und $3 \times 60 = \frac{180}{240}$. Ein Fünftel von $240 = 48$, und $48 \times 2 = \frac{96}{240}$. Ein Sechstel von $240 = 40$, und $40 \times 5 = \frac{200}{240}$. Ein Achtel von $240 = 30$; und $3 \times 30 = \frac{90}{240}$. Zuletzt können, wie oben geschehen ist, die Theilzahlen in einer ebenen Linie über das Theilganze geschrieben werden.

Eine

Eine gleiche Verfahrungsweise findet auch statt bei folgenden Aufgaben: von

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, und $\frac{7}{10}$
b) $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{6}$
c) $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$ und $\frac{2}{7}$

soll das gemeinschaftliche Theilganze gefunden werden, das alle diese kleinen Theilganzen in sich als erschöpfende Theile begreift. Hierbei sind die Schüler blos darauf aufmerksam zu machen, daß bei Aufgabe a) dieß schon durch Multiplikazion der beiden größten Zahlnahmen ($6 \times 10 = 60$) bewerkstelliget wird, weil alle übrigen Zahlnahmen erschöpfende Theiler jener beiden sind. Dasselbe ist der Fall bei Aufgabe b) in Rücksicht der Zahlnahmen 3 und 2, die mit den übrigen nicht zu multipliziren sind, weil sie als Theiler in diesen aufgehen. 1680 ist daher der gemeinschaftliche Zahlnahme für alle Theilganze. — Bei der Aufgabe c) braucht man 5, 3, 2 nicht zu multipliziren, weil sie als erschöpfende Theile in den andern Zahlnahmen enthalten sind. 2520 ist folglich der gemeinschaftliche Zahlnahme für alle Theilganze.

Um den Schülern noch den Vortheil dieser Abkürzungsweise praktisch nachzuweisen, gebe man ihnen auf, den gemeinschaftlichen Zahlnahmen durch Multiplikazion aller in den Theilzahlen von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{10}$ enthaltenen Zahlnahmen zu finden. Dieser ist 3,628,800. Lassen sie hierauf die Multiplikazion mit den ersten vier Zahlnahmen weg, weil sie als erschöpfende Theiler in den folgenden Theilganzen enthalten sind, so erhal-

erhalten sie den weit geringern Gesammtzahlnahmen 36/240.

Anm. Zuweilen ist der Fall vorhanden, daß eine der Theilganzen eine Zahl enthält, in welcher die andern Theilganzen gleichtheilig enthalten sind. Z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, und $\frac{3}{4}$. Hier ist die Zahl 12, welche sich in 4×3 und 6×2 zerlegen läßt. $\frac{1}{2}$ ist folglich gleich $\frac{6}{12}$; $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{3}{12} = \frac{3}{12}$. Ein anderes dergleichen Beispiel enthält die Aufgabe: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{17}{24}$ denn sämmtliche Theilganze sind in dem größten Zahlnahmen 24 gleichtheilig enthalten.

§. 57.

h) Noch ein weiteres Abkürzungsmittel durch Zerlegung der Theilganzen.

Dieses bestehet darin, daß man die Namenzahl der Theilganzen in ihre Vervielfachungszahlen zerlegt, und mit Ausnahme derer, welche doppelt vorkommen, miteinander multiplizirt.

Aufgabe a). Die Theilganzen $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{14}$ sollen ein gemeinschaftliches Theilganze erhalten.

$8 : 168 = 21 \times 3 = 63$;

$12 : 168 = 14 \times 5 = 70$;

$7 : 168 = 24 \times 3 = 72$;

$14 : 168 = 12 \times 5 = 60$; folglich: $\frac{63.\ 70.\ 72.\ 60}{168}$

Auf-

Auflösung: $8 = 2 \times 4$

$12 = 3 \times (4)$

$7 = 1 \times (7)$

$14 = (2) \times 7.$

Hiervon werden die doppelt vorkommenden Vervielfachungszahlen 4, 2 und 7 gestrichen, aus den bleibenden $2 \times 4 (= 8) \times 3 (= 24) \times 7 = 168$ als gemeinschaftliches Theilganze, statt des Produktes 2688 aus allen Vervielfältigungszahlen, gebildet. In dieser Zahl 168 ist 2, 4, 3 und 7 enthalten, weil sie die Multiplikazionssumme von diesen Theilzahlen ist; und eben so auch 8, 12, 7 und 14, weil $2 \times 4 = 8$; $3 \times 4 = 12$; $1 \times 7 = 7$; und $2 \times 7 = 14$ ist.

Aufgabe b). Die Theilganzen $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$ sollen ein gemeinschaftliches Theilganze erhalten. Da aber das Produkt aller Namenzahlen 69,672,960 beträgt, so ist durch Anwendung der bisherigen Abkürzungsmittel ein minderzähliges Theilganze aufzusuchen.

Auflösung: 2, 4, 8 ist in 16, 3 in 6, und 6 in 12 enthalten; und dürfen daher nicht mit multiplizirt werden. Von den übrigen Theilganzen läßt sich 16 durch 4×4, und 9 durch 3×3 ohne Rest theilen. Es bleiben mithin nur folgende Zahlen zu multipliziren übrig; 12, 5, 7 und die beiden letzten Vervielfältigungszahlen 4 und 3 übrig, welche das Gesammttheilganze 5040 geben. Hievon sind die in gleichem Verhältnisse zu erhöhenden Theilzahlen auf folgende Weise zu bestimmen.

$\frac{5}{12}$ 12

$\frac{5}{12}$	12 :	5040 =	420 × 5 =	2100
$\frac{7}{16}$	16 :	—	315 × 7 =	2205
$\frac{7}{8}$	8 :	—	630 × 7 =	4410
$\frac{1}{5}$	5 :	—	1008 × 1 =	1008
$\frac{2}{3}$	3 :	—	1680 × 2 =	3360
$\frac{5}{6}$	6 :	—	840 × 5 =	4200
$\frac{1}{2}$	2 :	—	2520 × 1 =	2520
$\frac{3}{7}$	7 :	—	720 × 3 =	2160
$\frac{3}{4}$	4 :	—	1260 × 3 =	3780
$\frac{2}{9}$	9 :	—	560 × 2 =	1120

$$\frac{26,863}{5040} = 5\,\frac{1663}{5040}$$

2. Addiren.

§. 58.

a) Mit gleichnahmigen Theilzahlen.

Aufgabe: wie heißt die Summe von

8 Dritteln		6 Neunteln		7 Zwölfteln	
12	—	2	—	8	—
7	—	61	—	11	—
23	—	77	—	9	—
24	—	18	—	7	—
6	—	4	—	8	—
5	—	6	—	3	—

Auflösung: die erste Summe heißt 95 Drittel, oder 31 Ganze und $\frac{2}{3}$; die zweite 174 Neuntel = 19 Ganzen und $\frac{3}{9}$ (= $\frac{1}{3}$); die dritte 57 Zwölftel = 4 Ganze und $\frac{9}{12}$ ($\frac{3}{4}$).

§. 59.

§. 59.

b) Mit ungleichnahmigen Theilzahlen.

Aufgabe a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+$; b) $\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}$; c) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{7}{8}+\frac{3}{4}$.

Auflösung a):

$\frac{1}{3}$	20 (3:60=20; 1×20=20)
$\frac{1}{4}$	15 (4:60=15; 1×15=15)
$\frac{2}{5}$	24 (5:60=12; 2×12=24
	59

3×4=12×5=60=

Auflösung b):

$\frac{3}{4}$	90 (4:240=60; 3×60=90)
$\frac{3}{5}$	72 (5:240=48; 3×48=72)
$\frac{3}{6}$	120 (6:240=40; 3×40=120)

$$\frac{282}{5\times 6=30\times 4=120} = 2\tfrac{42}{120}\ (=\tfrac{7}{40})$$

Anm. Hierbei werden die Schüler darauf hingeleitet, 1) durch Verwandlung der letztern Theilzahl $\frac{3}{6}$ in die geringere von $\frac{1}{2}$ auch ein geringers Theilganzes zu finden; 2) die Theilzahlensumme auf ganze Zahlen und die geringsten Benennungen zurückzubringen.

Auflösung c). Da 3 in 6 und 4 in 8 enthalten ist, so dürfen nur die übrigen Theilganzen miteinander multiplizirt werden, und ein Gleichnahmiges zu finden.

$\frac{2}{3}$ | 160 (3 : 240 = 80; 2 × 80 = 160)
$\frac{4}{5}$ | 192 (5 : 240 = 48; 4 × 48 = 292)
$\frac{1}{6}$ | 40 (6 : 240 = 40; 1 × 40 = 40)
$\frac{7}{8}$ | 210 (8 : 240 = 30; 7 × 30 = 210)
$\frac{3}{4}$ | 180 (4 : 240 = 60; 3 × 60 = 180)

$$\frac{782}{} = 3\,\frac{62}{240} = \frac{31}{120}$$

$5 \times 6 = 30 \times 8 = 240$

Anm. Hier folgen noch einige Aufgaben, deren richtiger Ansatz und richtige Berechnung von den Schülern selbst gefunden werden muß.

1) Wie viel machen $\frac{2}{5}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{10}+\frac{5}{12}$ zusammen? das gleichnahmige Theilganze ist — (weil 5 in 10 enthalten, und 6, 12, 8 in die erschöpfenden Theiler 3 und 4 aufgelöst werden können) $3 \times 4 = 12 \times 10 = 120$; die Hauptsumme $2\,\frac{111}{120}$.

2) Wie viel $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}+\frac{7}{10}+\frac{11}{12}$? Das gleichnahmige Theilganze ist 360; die Summe $\frac{2315}{360} = 6\,\frac{155}{360} = 6\,\frac{31}{72}$.

3) Wie viel $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{11}{24}$? das gleichnahmige Theilganze ist 24; die Summe $\frac{88}{24} = 3\,\frac{16}{24} = 3\,\frac{2}{3}$.

4) Wie viel $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}+\frac{11}{24}+\frac{13}{36}+\frac{17}{72}$? das gleichnahmige Theilganze ist 72; die Summe $\frac{495}{72} = 6\,\frac{63}{72} = 6\,\frac{7}{8}$.

§. 60.

§. 60.

c) Mit gemischten Zahlen.

Die Aufgabe sey: $13\frac{5}{8}$, $6\frac{3}{4}$, $5\frac{2}{3}$, $46\frac{1}{2}$ zu addiren. Aufgelöst wird sie dadurch, daß man a) das theilnahmige Theilganze nach Vorschrift aufsucht, welches hier 24 ist; b) die hiernach bestimmten Theilzahlen auf die Gesammtsumme $\frac{61}{24}$ bringt; diese c) auflöst in $2\frac{13}{24}$; und d) die 2 Ganzen zu den übrigen 70 Ganzen addirt. Die zweckmäßigste Ansatzweise dürfte folgende seyn:

	$13\frac{5}{8}$	15 (8 : 24 = 3; 5 × 3 ꝛc.)
	$6\frac{3}{4}$	18
	$5\frac{2}{3}$	16
	$46\frac{1}{2}$	12
Betrag der ganzen Zahlen	70	61
— Theilzahlen	$2\frac{13}{24}$	―― = $2\frac{13}{24}$
Summe	$72\frac{13}{24}$	24 als Produkt von 3 × 8

Auf gleiche Weise sind auch folgende Aufgaben zu behandeln:

1) Ein Taglöhner hat in einem Hause $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$ Tage gearbeitet; wie viel in allen? ($7\frac{1}{2}$).

2) In seinem Keller hat ein Hausvater vier Fässer Bier liegen, wovon das erste $2\frac{1}{2}$, das zweite $3\frac{1}{3}$, das dritte $4\frac{1}{4}$, und das vierte $5\frac{1}{5}$ Eimer enthält. Er will wissen, wie viel zusammen. ($15\frac{17}{60}$.

3) Eine Bäuerin verkaufte im ersten Sommermonate $12\frac{9}{64}$, im zweiten $32\frac{7}{32}$, im dritten $20\frac{3}{16}$, im vierten $34\frac{5}{8}$, im fünften $58\frac{3}{4}$ und im sechsten $62\frac{1}{2}$ Pfund Schmalz. Wie viel verkaufte sie in allen? ($220\frac{27}{64}$ Pfund).

4) In

4) In einem Dörfchen bestehen die Bauernschaften in folgenden Höfen: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$; wie viele ganze Höfe sind dieß zusammen? ($2\frac{5}{8}$ Höfe).

5) Wie hoch kommt der Sold eines einfachen Offizierpersonals eines Regiments, wenn der Oberst $1288\frac{7}{12}$, der Oberstlieutenant $915\frac{7}{8}$, der Major $335\frac{5}{8}$, der Kapitän $315\frac{2}{3}$, der Lieutenant $200\frac{7}{16}$, der Fähndrich $164\frac{7}{8}$ Thaler Gehalt bezieht? ($3220\frac{5}{8}$) Thaler).

3. Multipliziren.

§. 61.

a) Mit ganzen und Theilzahlen.

Bei Multiplikazion der Theilzahlen mit ganzen Zahlen führe man seine Schüler zu allererst auf folgende Bemerkungen:

1) Daß durch die Multiplikazion nur die Zahlen verändert werden, nicht aber die Dinge, deren Anzahl sie bezeichnen. Z. B. 3 Mahl 6 Aepfel sind 18 Aepfel. Eben so verhält es sich auch bei den Zahlnamen, welche die Theile eines Ganzen führen. Z. B. 3×6 Drittel sind 18 Drittel. In beiden Fällen bleiben die Aepfel und die Drittel unverändert. Man muß sich daher nicht irre machen lassen, wenn die Zahlnamen mit Zahlen ausgedrückt werden. $3 \times \frac{6}{3}$ sind nur $\frac{18}{3}$; der Zahlname 3 bleibt unverändert.

2) Daß man einerlei Erzeugniß (Produkt) erhält, wenn die Hauptzahl zum Vervielfältiger, und der Ver-

viel-

vielfältiger zur Hauptzahl gemacht wird. Z. B. $3 \times 6 = 18$; und umgekehrt 6×3 ist gleichfalls achtzehn. Es ist daher auch einerlei, ob man Theilzahlen mit ganzen Zahlen, und ganze Zahlen mit Theilzahlen multiplzizire, und es findet deswegen in der Verfahrungsweise keine andere Regelanwendung statt.

3) Mit Eins kann nicht multiplicirt werden, weil die Hauptzahl dieselbe bleibt, und keineswegs vervielfältiget wird. 1 Mahl 6 z. B. ist 6. Daher sind auch $5 \times \frac{1}{4}$ (Aepfel)? ($= \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$) und $\frac{1}{4} \times 5 = ?$

Hierauf gebe man seinen Schülern folgende Aufgaben zur Berechnung:

$6 \times \frac{2}{3}$ (z. B. Linie) $= \frac{12}{3} = 4$ Ganze

$7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

$8 \times \frac{5}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$

$9 \times \frac{7}{12} = \frac{63}{12} = 5\frac{3}{12} (\frac{1}{4})$

$10 \times \frac{12}{13} = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$

$11 \times \frac{23}{6} = \frac{253}{6} = 42\frac{1}{6}$

$12 \times \frac{33}{112} = \frac{396}{112} = 3\frac{60}{112} (\frac{15}{28})$

$13 \times \frac{114}{365} = \frac{1482}{365} = 4\frac{22}{365}$

$24 \times \frac{27}{99} = \frac{648}{99} = 6\frac{52}{99}$

Die Schüler werden ohne besondere Nachhülfe selbst die Regel auffinden, daß hierbei nichts anderes zu thun sey, als die Theilzahl durch die Hauptzahl zu vervielfältigen; und wenn man die unächte Theilzahl nicht stehen lassen will, das Erzeugniß durch die Namenzahl des Theilganzen dividirt.

Dabei können sie sogleich auf das abgekürzte Verfahren aufmerksam gemacht werden, welches bei solchen

Auf-

Aufgaben anwendbar ist, wo die Hauptzahl dem Theilganzen gleich oder ein erschöpfender Theil derselben ist. In solchen Fällen kann mit der Division angefangen werden, weil das Erzeugniß da, wo eine Zahl mit der andern multiplizirt, und dann mit einer dritten dividirt wird, ganz einerlei seyn muß, wenn dabei mit der Division angefangen und mit der Multiplikazion geendiget wird. Z. B. das Erzeugniß der obigen ersten Aufgabe war 4 Ganze; wenn man die Hauptzahl 6 zuerst mit der Namenzahl 3 dividirt, so erhält man 2, und $2 \times 2 = 4$. Ein anderes Beispiel sey $6 \times \frac{7}{12} = \frac{42}{12} = 3\frac{1}{2}$ oder kürzer: $6 : \frac{7}{12} = \frac{7}{2}$ (hier wird das Theilganze 12 auf 2 vermindert) $= 3\frac{1}{2}$; oder man gebe die Aufgabe: ein Knabe habe 60 Nüsse erhalten, welche er mit noch 5 andern Knaben unter sich gleich vertheilen soll. Diese fünf fordern $\frac{5}{6}$ des Ganzen, um solche selbst unter sich weiter zu vertheilen. Es fragt sich, wie viel er ihnen davon abzugeben hat.

Nach erster weitläufiger Berechnung wird auf folgende Weise verfahren:

$$60 \times \frac{5}{6} = \frac{300}{6} = 50.$$

Nach der zweiten abkürzenden, wird 6 : 60 dividirt, wodurch der Vervielfältiger 10 gewonnen wird.

$$6 : 60 = 10 \times 5 = 50.$$

Anm. Hierher gehört auch der Fall, wenn der Vervielfältiger und die Namenzahl des Theilganzen gleiche Zahlen sind; denn hier dürfen beide ausgestrichen werden, um das Erzeugniß zu finden. Z. B. $9 \times \frac{8}{9} = \frac{72}{9} = 8$ Ganze. Streicht man beide Neunen

nen aus, da sie sich heben (9) × ($\frac{8}{9}$) so bleiben Acht.

§. 62.

b) Von der hierbei zu gebrauchenden Zerstreuungsweise.

Theilzahlen lassen sich zerstreuen, das heißt, in mehrere Theilzahlen zerlegen. Z. B. $\frac{7}{8}$ läßt sich zerlegen in 4 + 2 + 1 Achtel, denn $\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. $\frac{4}{8}$ aber ist $= \frac{1}{2}$; $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Eben so läßt sich zerstreuen

$\frac{5}{8} = \frac{4}{8} (= \frac{1}{2}) + \frac{1}{8}$; und $\frac{11}{16} = \frac{8}{16} (= \frac{1}{2}) + \frac{2}{16} (= \frac{1}{8}) + \frac{1}{16}$.

Aufgaben dieser Art zur Erlangung weiterer Fertigkeit im Zerlegen sind:

$\frac{15}{32}$; $\frac{33}{60}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{37}{60}$ $(= \frac{30}{60} + \frac{6}{60} + \frac{1}{60})$.

Von dieser Zerstreuungsweise läßt sich bei den bisherigen Multiplikazions-Aufgaben eine erleichternde Anwendung machen.

Man zerstreut nähmlich den Vervielfältiger in solche Theile, durch deren Hülfe sich das Erzeugniß leichter finden läßt. Beispiele:

a) $\frac{3}{4} \times 24$. $\frac{3}{4}$ läßt sich zerstreuen in $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, und in $\frac{1}{4}$, denn $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}$ von 24 = 12
$\frac{1}{4}$ „ 24 = 6
———
18.

b)

b) $\frac{7}{8} \times 32$. $\frac{7}{8} = \frac{4}{8} (= \frac{1}{2}) + \frac{2}{8} (= \frac{1}{4}) + \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{2} : 32 = 16$$
$$\frac{1}{4} : 32 = 8$$
$$\frac{1}{8} : 32 = 4$$
$$\overline{\quad 28 \quad}$$

c) Es gibt jemand jährlich 37 fl. Miethe, und ist solche nun schon seit 7 Monaten schuldig; wie viel beträgt dieß? $\frac{7}{12}$tel eines Jahres lassen sich zerstreuen in

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} : 37 \text{ fl.} = 18\frac{1}{2} \left(\frac{6}{12}\right)$$
$$\frac{1}{12} : 37 \text{ fl.} = 3\frac{1}{12}$$
$$\overline{\quad 21 \text{ fl. } \frac{7}{12}. \quad}$$

d) Es kaufte jemand für 125 Gulden Holz, wovon er $\frac{2}{5}$ für sich behielt, und $\frac{3}{5}$ einem Freunde überließ $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$; $\frac{1}{5} = 25$; $(25 + 25 = 50$.

Anm. Letztere Aufgabe gibt Gelegenheit zur Auflösung auch nach den beiden vorigen Weisen. $\frac{2}{5} \times 25 = \frac{250}{5} = 50$; oder $5 : 125 = 25 \times 2 = 50$. — Weitere Aufgaben sind z. B. Von den in 12,728 Morgen bestehenden Markung eines Fleckens besitzt die Gutsherrschaft $\frac{7}{12}$. Von 220 Klafter Gemeindewald bekommt die Schule $\frac{2}{23}$tel. Wie viel beträgt dieß?

§. 63.

§. 63.

c) Mit Theilzahlen unter sich.

Hierbei muß man zuerst seine Schüler darauf aufmerksam machen, daß das Erzeugniß gleichfalls nicht größer, sondern kleiner ausfallen müsse, weil jede Theilzahl nicht so viel Mahl, als eine ganze Zahl Einheiten enthält, vervielfältiget werden soll, sondern nur um einen gewissen Theil eines Ganzen. Z. B. wenn $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ so heißt dieß: 3 Viertel soll ich 2 Drittel Mahl nehmen. 3 Viertel müssen folglich erst in 3 Theile getheilt werden, wovon 2 Theile die gesuchte Zahl ausmachen. $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, denn der dritte Theil von 3 Vierteln ist ja ein Viertel; $\frac{2}{3}$ von 3 Vierteln sind folglich $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ein anderes Beispiel sey $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$. Hier sollen die 2 Drittel in 5 Theile weiter getheilt und davon 2 × 4 Theile genommen werden. Wird jedes Drittel in 5 Theile getheilt, so wird das Drittelganze dadurch in ein Funfzehntelganzes getheilt. Von diesen soll die Zahl von 2 × 4 angegeben werden, und diese ist $\frac{8}{15}$. Als *Regel* des Verfahrens bei solchen Aufgaben läßt sich daher angeben: vervielfältige die beiden Theilzahlen und die beiden Theilganzen miteinander, und du hast das Erzeugniß gefunden; denn $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. — Weitere Beispiele sind: Das Erzeugniß von $\frac{8}{9} \times \frac{2}{3}$, von $\frac{2}{3} \times \frac{8}{9}$, von $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$, von $\frac{5}{7} \times \frac{7}{10}$ zu finden. — Die beste Ansatzweise hierbei ist folgende:

	5
7	
	7
10	
70	35

$$\frac{35}{70}$$

§. 64.

c) Mit gemischten Zahlen.

Es trifft sich, daß entweder die Hauptzahl und der Vervielfältiger aus gemischten (ganzen und Theil-) Zahlen, oder nur eine davon hieraus besteht.

Im letztern Falle z. B. $\frac{2}{3} \times 4\frac{5}{6}$ kann die Auflösung auf dreierlei Weise in Volksschulen nachgewiesen werden:

a) wenn man die vermischte Zahl in eine unächte Theilzahl verwandelt. $4 \times 6 = 24 + 5 = \frac{29}{6}$ worauf nach der gewöhnlichen Weise verfahren wird:

$$\frac{29}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{58}{18} = 3\frac{4}{18}\ (\frac{2}{9}).$$

Weitere Aufgaben dieser Art z. B. sind: a) Von 16 Personen soll jede $\frac{5}{8}$ fl. erhalten; wie viel macht das Ganze? b) was kostet $\frac{1}{3}$ Klafter Holz, wenn für das Klafter $5\frac{7}{8}$ fl. gezahlt werden muß. Hier kann wieder die in §. 64 zuletzt angegebene Ansatzweise gebraucht werden:

	16				
1			3		
	5			47	
8			8		
8	80	10 fl.	24	47	$1\frac{23}{24}$ fl.

b) Oder man multiplizirt zuerst die ganzen Zahlen miteinander, dann die ganze Zahl mit der Theilzahl und addirt zuletzt die beiden Erzeugnisse. Z. B. Es soll das Erzeugniß von $16\frac{5}{8} \times 32$ gefunden werden.

1) 16	2) $\frac{5}{8} \times 32 = \frac{160}{8} = 20$ oder kürzer da 8 : 32 vier Mahl enthalten ist, $5 \times 4 = 20$.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 32 \\ \hline 32 \\ 48 \\ \hline 512 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} 1) & 512 \\ 2) & 20 \\ \hline \text{zusammen} & 532 \end{array}$$

c) Auch kann man sich hierbei des Zerstreuens mit Vortheile bedienen. Z. B. die letztere Aufgabe $\frac{5}{8}$ läßt sich zerstreuen in $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; und $\frac{1}{8}$.

$$\begin{array}{lr} \text{die Hälfte von } 32 = & 16 \\ \text{das Achtel } \text{ = } \text{ = } = & 4 \\ \hline & 20 \\ \text{Hierzu } 16 \times 32 = & 512 \\ \hline & 532 \end{array}$$

Noch ein Beispiel sey $84\frac{7}{16} \times 42$, welche Aufgabe auf die drei bisher nachgewiesene Verfahrungsweise von den Schülern aufgelöst werden soll. Das Erzeugniß ist $3546\frac{3}{8}$.

§. 65.

Fortsetzung.

In dem noch übrigen Falle besteht sowohl die Hauptzahl als der Vervielfältiger aus Theilzahlen.

Hier gilt als Hauptregel, daß man beide Zahlen zuerst auf einerlei Benennung bringen und daher beide in unächte Theilzahlen verwandeln müsse. Z. B. $8\frac{3}{4}$

Mahl $24\frac{4}{5}$? $8\frac{3}{4} = \frac{35}{4}$ und $24\frac{4}{5} = \frac{124}{5}$; $\frac{35}{4} \times \frac{124}{5} = \frac{4340}{20}$ ($= 217$).

Bei größern Aufgaben kann man auch alle einzelne Theile, die beiden ganzen Zahlen, jede wieder mit der andern Theilzahl und die beiden Theilzahlen, miteinander multipliziren, und dann die einzelnen Erzeugnisse summiren. Z. B. $24\frac{7}{8} \times 16\frac{3}{4}$.

1) $\begin{array}{r} 24 \\ 16 \\ \hline 144 \\ 24 \\ \hline 384 \end{array}$ 2) $\begin{array}{c} 24 \\ \text{3 Viertel} \\ \hline \frac{72}{4} = 18 \end{array}$ 3) $\begin{array}{c} 16 \\ \text{7 Achtel} \\ \hline \frac{112}{8} = 14 \end{array}$ 4) $\frac{7}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{21}{32}$

$$\begin{array}{ll} 1) & 384 \\ 2) & 18 \\ 3) & 14 \\ 4) & -\ \frac{21}{32} \\ \hline \text{S.} & 416\ \frac{21}{32} \end{array}$$

Auch kann man sich hierbei der Zerstreuung oft mit Vortheile bedienen. Zum Beispiele diene die vorige Aufgabe. $\frac{7}{8}$ läßt sich zerstreuen in $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, in $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, und in $\frac{1}{8}$. Die Hälfte von 16 (womit $\frac{1}{2}$ multiplizirt werden muß) = ... 8
das Viertel davon ist 4
das Achtel 2
S. 14

$\frac{3}{4}$ läßt sich zerstreuen in $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, und in $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$ von $24 = 12$; und $\frac{1}{4}$ von $24 = 6$; $6 + 12 =$ 18
hierzu das Erzeugniß von $24 \times 16 =$ 384
und von $\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$ $\frac{21}{32}$
S. $416\ \frac{21}{32}$

Anm.

Anm. Lehrer, welchen es gelingt, mit ihren Schülern ganz in den Geist des Denkrechnens einzudringen, werden keine Schwierigkeit finden, wenn sie von ihnen fordern, diese verschiedene Verfahrungsweise anzuwenden. Diejenigen hingegen, welche hierin minder glücklich sind, werden sich begnügen müssen, bei einer derselben stehen zu bleiben. Diese haben dann durch Gründlichkeit zu ersetzen, was an Mannichfaltigkeit abgeht.

§. 66.

d) Ein Abkürzungsmittel.

Bei allen bisher vorgekommenen verschiedenen Aufgaben läßt sich auch zuweilen das Verfahren dadurch abkürzen, daß man die bei den Theilzahlen vorkommenden Zahlen gegenseitig aufhebt oder auch nur verkleinert.

a) Bei Multiplikazion einer ganzen Zahl mit einer Theilzahl z. B. $9 \times \frac{8}{9} = \frac{72}{9} = 8$ Ganze, wie es auf die gewöhnliche Weise berechnet wird. Umklammert man beide zum Zeichen, daß sie sich gegenseitig aufheben, $(9) \times \frac{8}{(9)}$, so hat man schon die gesuchte Zahl gefunden. Der Grund dieser Erscheinung liegt darin, daß jeder Vervielfältiger sein Erzeugniß wieder aufhebt, wenn er als Theiler gebraucht wird. Z. B. $6 \times 2 = 12$; $6 : 12 = 2$.

b) Bei Multiplikazion zweier Theilzahlen miteinander. Ist die Aufgabe z. B. $\frac{3}{4} \times \frac{4}{9}$ so ist die Auflösung auf folgende Weise zu bewerkstelligen.

$$\frac{3}{(4)} \times \frac{(4)}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Sind

Sind die Zahlen auch nicht gleich, so lassen sie sich doch oft gleichmäßig verringern, z. B. in der Aufgabe $\frac{8}{9} \times \frac{15}{12}$, in welcher 8 und 12 durch den Theiler 2, und 9 und 15 durch den Theiler 3 sich verringern lassen. Die Brechungsweise ist dann folgende.

$$\frac{4(8)}{3(9)} \times \frac{(15)\ 5}{(22)\ 11} = \frac{20}{33}$$

c) Bei Multiplikazion einer einfach vermischten Zahl z. B. $\frac{7}{16} \times 11\frac{3}{7}$. Wird letztere Zahl in die unächte Theilzahl $\frac{80}{7}$ verwandelt, so läßt sich nicht nur 7 gegen 7 heben, sondern auch 16 durch Division mit 80 in 5 ganze Zahlen verwandeln.

$$\frac{(7)}{(16)} \times \frac{(80)5}{(7)} = 5 \text{ Ganze.}$$

d) Bei Multiplikazion einer doppelt vermischten Zahl z. B. $3\frac{3}{8} \times 15\frac{1}{9}$. Zuerst werden die beiden Zahlen in die unächten Theilzahlen $\frac{27}{8}$ und $\frac{136}{9}$ verwandelt. 27 läßt sich durch den Theiler 9 auf 3, und 136 durch den Theiler 8 auf 17 verringern; 3 × 17 aber macht 51.

$$3\ \frac{(27)}{(8)} \times \frac{(136)}{(9)}\ 17 = 51.$$

§. 67.

4) Subtrahiren.

Das Abziehen einer Theilzahl von einem Ganzen hat nicht die mindeste Schwierigkeit, weil das Ganze nur

nur auf gleiche Benennung, oder in das gleichlautende Theilganze verwandelt werden darf. Wenn man z. B. von 1 Apfel $\frac{1}{3}$ wegnehmen soll, wird das eine Ganze (der Apfel) in $\frac{3}{3}$ verwandelt. 1 Drittel von 3 Dritteln weggenommen, bleiben 2 Drittel. Soll man von 6 Aepfeln nicht den dritten Theil der ganzen Anzahl (dieß wären 2) sondern nur von einem Apfel darunter den 3ten Theil wegnehmen, so bleibt $5\frac{2}{3}$.

Eben so wenig Mühe kostet es, bei einer aus bloßen gleichnamigen Theilzahlen bestehenden Aufgabe die gesuchte Zahl zu finden. Z. B. von 8 Sechstel 3 Sechstel abgezogen bleiben 5. Die zweckmäßigste Ansatzweise, um die Schüler durch die Namenzahl nicht zu verwirren, scheint folgende zu seyn.

$$\begin{array}{r|l} 8 & \\ 3 & \text{6tel} \\ \hline 5 & \end{array}$$

Sind die beiden Theilzahlen ungleichnahmig, so müssen sie vorher gleichnamig gemacht werden, ehe das Abziehen vorgenommen werden kann. Z. B. von $\frac{7}{8}$ sollen $\frac{7}{9}$ abgezogen werden.

$$\begin{array}{r|l} \frac{7}{8} \times 9 = 63 & \\ \frac{7}{9} \times 8 = 56 & 72 \text{ (das gleichnamige Theilganze)} \\ \text{bleibt: } \frac{7}{72} & \end{array}$$

Weitere Aufgaben dieser Art sind: $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$; $\frac{13}{16} - \frac{11}{24}$; $\frac{7}{12} - \frac{2}{15}$; bei welchen noch überdieß die Verkleinerungs-

weise

weise angebracht werden kann, indem die Vervielfältiger 9 und 6, in 3 und 2, 16 und 24 in 2 und 3, und 12 und 15 in 4 und 5 zur Abkürzung verwandelt werden. Z. B.

$$\begin{array}{l|l} \frac{13}{16} \times 3 = 39 & \\ \frac{11}{24} \times 2 = \underline{22} & \text{48 das gleichnamige Theilganze} \\ \quad\quad\quad\;\; 17 & \\ \quad\quad\quad\; \overline{48} & \end{array}$$

Im Falle sich auch ganze Zahlen dabei befinden, so gibt es nur dann eine Schwierigkeit, wenn die abzuziehende Theilzahl größer als diejenige ist, von welcher sie abgezogen werden kann. Z. B. es sollen von $5\frac{7}{9}$ abgezogen werden $3\frac{11}{12}$. Da 9 und 12 sich durch 3 und 4 vermindern lassen, so wird das gleichnamige Theilganze auf folgende Weise gewonnen:

$$\begin{array}{l|l} 5\frac{7}{9} \times 4 = 28 & \\ 3\frac{11}{12} \times 3 = \underline{33} & \text{36 das gleichnamige Theilganze} \end{array}$$

33 Sechsunddreißigtel lassen sich aber nicht von 28 Sechsunddreißigtel abziehen; es muß daher noch ein Ganzes von der ganzen Zahl 5 genommen, und in $\frac{36}{36}$ verwandelt werden, um $(28 + 36 =) \frac{64}{36}$ zu gewinnen, von welchen 33 abgezogen werden können, wie folget:

$$\begin{array}{l|l} 5\frac{7}{9} \times 4 = 28 + 36 = 64 & 36 \\ 3\frac{11}{12} \times 3 = \quad . \quad . \quad \underline{33} & \\ \text{1 Ganzes und} \quad\quad \frac{31}{36}\text{tel} & \end{array}$$

Will

Will man sich nicht zu dieser Rechnungsweise bequemen, so kann man auch alles in unächte Theilzahlen auf folgende Weise verwandeln

$$5\tfrac{7}{9} = \tfrac{52}{9} \times 12 = 624$$
$$3\tfrac{11}{12} = \tfrac{47}{12} \times 9 = 423 \quad \Big|\ 108 \text{ das gleichnamige Theilganze}$$

$$\frac{201}{108} = 1\tfrac{93}{108} \left(=\tfrac{31}{36}\right)$$

Anm. Nur leise werden Lehrer daran erinnert, weil solches Noth thut, ihre Schüler ja an kein mechanisches, des Grundes unbewußten Handeln gewöhnen zu lassen, und sie deswegen wiederholungsweise um jenen bei jeder Gelegenheit zu befragen, z. B. warum die beiden Theilganzen bei der Multiplikazion zur Auffindung des gleichnamigen Ganzen verwechselt werden müssen rc.

5. Dividiren.

§. 68.

a) Mit Zahlen, deren Theiler und Theilungszahlen Theilzahlen sind.

Hierbei finden zwei Fälle statt: entweder sind sie gleichnamig oder ungleichnamig.

Im ersten Falle findet sich nicht die mindeste Schwierigkeit zu lösen. Z. B. die Aufgabe, wie oft $\tfrac{2}{9}$ von $\tfrac{8}{9}$ weggenommen werden kann 2 : 8 = 4 Mahl.

Im

Im zweiten Falle müssen nach der allgemeinen Regel die Zahlen erst gleichnamig gemacht werden, weil man nicht Ungleiches von Ungleichen (3 Aepfel von 6 Birnen, 3 Viertel von 6 Drittel) wegnehmen kann. Es sey die Aufgabe: $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$, so sind erst beide unter gleiche Benennung dadurch zu bringen, daß durch 3×4 das gleichnamige Ganze 12, und durch die wechselseitige Multiplikazion einer jeden Theilzahl mit der Namenzahl (dem Theilganzen) des andern, die gleichvergrößerten neuen Theilzahlen gebildet werden. Demzufolge ist $\frac{2}{3}:\frac{3}{4} = \frac{8}{12}:\frac{9}{12}$. $\frac{8}{12}$ von $\frac{9}{12}$ kann man nur 1 Mahl 8 wegnehmen, und es bleibt noch $\frac{1}{8}$ Rest.

Man sieht hieraus, daß die gleichnamigen Ganzen gar nicht mehr in Betrachtung kommen, weil es hier nur gilt zu wissen, wie oft 8 in 9 enthalten ist, mögen übrigens beide Zahlen Benennungen führen, welche man will. Man kann sich daher auch die Mühe ersparen, dieses gleichnamige Ganze zu bilden, wenn nur die neuen Theilzahlen richtig gebildet werden, was entweder auf obige kreuzweise Multiplikazion oder was ganz einerlei ist, durch Umkehrung einer Theilzahl zu bewerkstelligen ist. Z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 8:9$ oder durch Umkehrung der Theilzahl $\frac{4}{3}:\frac{3}{2}$; denn $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

Wie viele Pfund bekommt man für $\frac{8}{15}$ fl. wenn das Pfund $\frac{4}{5}$ fl. kostet? $\frac{5}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ Pfund.

Weitere Aufgaben sind: $\frac{5}{6}:\frac{7}{8}$; $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$ u. s. w. Die bequemste, und daher in den Schulen einzuführende Ansatzweise ist, wenn man statt des Querstriches einen senkrech-

ten

ten zieht, und auf beiden Seiten die miteinander zu multiplizirenden Zahlen setzt. Z. B. die obigen Aufgaben.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ 2 & \\ & 3 \\ \underline{4} & \\ 8 & 9 = 1\frac{1}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 5 \\ 4 & \\ & 8 \\ \underline{15} & \\ 60 & 40 = \frac{2}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 6 \\ 5 & \\ & 7 \\ \underline{8} & \\ 40 & 42 = 1\frac{1}{20} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 2 \\ 1 & \\ & 4 \\ \underline{5} & \\ 5 & 8 \end{array}$$

§. 69.

b) Mit gemischten Zahlen.

Hier sind drei Fälle möglich. Entweder ist der Theiler oder die Theilungszahl allein eine gemischte Zahl; oder es sind dieses beide.

Aufgabe für den ersten Fall: Wie oft ist $3\frac{1}{3}$ in 20 enthalten? Die Auflösungsweise werden die Schüler selbst leicht auffinden, weil sie wissen, daß zu allererst die Zahlen des Theilers gleichnamig gemacht werden müssen. $3\frac{1}{3}$ ist aber $= \frac{10}{3}$; (denn $3 \times 3 = 9 + 1 = 10$) und $3 \times 20 = 60$; $10 : 60 = 6$ Mahl; Probe: $6 \times 3 = 18$; $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$; $18 + 2 = 20$.

Da es gleichviel ist, ob man eine Zahl zuerst multiplizirt und dann dividirt oder ob man solche umkehrt; so kann man auch auf folgende Weise verfahren:

$$\frac{10}{3} : 20 = 2 \times 3 = 6 \text{ Mahl.}$$

Oder nach obiger Ansatzweise mit einem senkrechten Striche

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ 10 & \\ & 20 \\ \hline 10 & 60 = 6 \text{ Mahl} \end{array}$$

Auf-

Aufgabe für den zweiten Fall: 3 Personen sollen sich in $1\frac{4}{5}$ Gulden theilen, wie viel erhält jede? Zuerst ist die Gleichnamigkeit der Zahlen herzustellen: $1\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ (denn $1 \times 5 = 5 + 4 = 9$); $3 : \frac{9}{5} = 3$ Mahl. — Sollte der Theiler nicht erschöpfend seyn, so wird vorher die Theilungszahl multiplizirt, wodurch eine gleichnamige und dabei durch den Theiler zu erschöpfende Zahl gewonnen wird. Z. B. wenn 3 Personen sich in $1\frac{3}{5}$ fl. oder $\frac{8}{5}$ fl. theilen sollen, so bleibt noch ein Rest, der eine doppelte Theilzahl gibt, die mit dem Erzeugnisse zu summiren ist:

$$3 : \frac{8}{5} = \frac{2}{5} + \frac{\frac{2}{5}}{3}; \quad \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15}; \quad \frac{2}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{10}{75} \times 30 = \frac{40}{75} = \frac{8}{15}.$$

Kürzer ist die Auflösung, wenn nach der ersten Art verfahren wird. $3 \times \frac{8}{5} = \frac{24}{15}$; $3 : \frac{24}{15} = \frac{8}{15}$.

Aufgabe für den dritten Fall. Bei kleinern Zahlen, wie z. B. wenn die Elle $5\frac{7}{8}$ fl. kostet, wie viel man für $1\frac{23}{24}$ fl. erhält, kann die Aufgabe dadurch einfach gelöst werden, daß beide Zahlen in einen unächten Bruch (in $\frac{47}{8}$ und $\frac{47}{24}$) verwandelt werden. Da sich die beiden Theilzahlen heben, und 8 zu 24 wie 1 zu 3 verhält, so ist die Aufgabe schon damit gelöset. Ausserdem wird sie vollständig auf folgende Weise bearbeitet.

$$\frac{47}{8} \times \frac{47}{24} = \frac{376}{(192)} : \frac{1128}{(192)} = \frac{376}{1128} = \frac{1}{3}$$

oder nach der Ansatzweise mit einer senkrechten Linie

	(47)
24	
	8
(47)	
24	8 = $\frac{1}{3}$

Bei

Bei größern Aufgaben findet nur eine längere Berechnung der vielen Zahlen statt. Z. B. $23\frac{3}{4} : 6235\frac{2}{3}$ welche Zahlen in den unächten Bruch $\frac{95}{4}$ und $\frac{18705}{3}$ verwandelt werden. Da das gleichnamige Ganze 12 als Erzeugniß von 4×3 nichts zur Auflösung beiträgt, so wird nur der Theiler mit 3 und die Theilungszahl mit 4 multiplizirt. Dieß wird am kürzesten bewerkstelliget, wenn der Theiler mit seinen beiden Zahlen umgekehrt und statt $\frac{95}{4}$ gesetzt wird $\frac{4}{95}$, weil dann die Multiplikazion in gleicher Linie $\frac{18705}{3} \times \frac{4}{95}$ statt auf eine kreuzweise Art $\frac{95}{4} \times \frac{18705}{3}$ mithin kürzer und bequemer vorgenommen werden kann. Hierdurch wird erhalten:

```
285 : 74820 | 262 10/19
      570 ..  |
      ----
      1782 .
      1710 .
      ----
       720
       570
       ---
       150
       --- = 10/19
       285
```

Noch ein anderes Beispiel sey:

$$4\frac{2}{3} : 19\frac{5}{12}$$

Die Auflösung ist folgende:

$$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$19\frac{5}{12} = \frac{233}{12}$$

$\frac{3}{14} \times \frac{233}{12} = \frac{699}{168} = 4\frac{11}{168}$ oder

```
     | 3
  14 |
     | 233
  12 |
 --- | ---
 168 | 699 = 4 11/168.
```

§. 70.

§. 70.

c) Mit ganzen Zahlen.

Wenn der Theiler eine ganze Zahl ist, so ist die Auflösung sehr einfach, wenn erstere erschöpfend ist, weil es gleichviel ist, was die Theilungszahl für einen Namen führt. 4:8 ist 2 Mahl enthalten, es mögen diese 8 Gulden oder Kreuzer oder Drittel seyn. $3 : \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$; $5 : \frac{10}{11} = \frac{2}{11}$; $8 : \frac{16}{17} = \frac{2}{17}$. Ist der Theiler nicht erschöpfend, so erhält man einen doppelten ungleichen Quotienten. Z. B. $4 : \frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Letztere doppelte Theilzahl läßt sich zwar durch 6×4 in die einfache Theilzahl $\frac{1}{24}$ verwandeln; nun kann aber $\frac{1}{6} + \frac{1}{24}$ vor Gleichnamigmachung nicht addirt werden $\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{24}{144} + \frac{6}{144} = \frac{30}{144} = \frac{5}{24}$; oder kürzer da 6 ein erschöpfender Theil von 24 ist:

$$\begin{array}{r} 6 : 24 = 4 \\ 24 : 24 = \underline{1} \\ \underline{5} \\ 24 \end{array}$$

Um diese Weitläufigkeiten zu ersparen, ist es einfacher und natürlicher, die Theilungszahl in eine erschöpfende Größe umzuschaffen, welches durch Multiplikazion mit dem Theiler ganz sicher bewerkstelliget wird. Der Ansatz ist folgender:

$$\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6} \times \frac{4}{4} =\right) \frac{20}{24};\; 4 : \frac{5}{6} = 4 : \frac{20}{24} = \frac{5}{24}$$

Dabei sind die Schüler noch auf die Bemerkung zu leiten, daß das Multipliziren des Theilers (4) mit der Theil-

Theilzahl (5) ganz erspart werden kann, weil dabei nichts bewirkt wird, indem das Erzeugniß 20 der Multiplikazion der 5 mit 4 anfänglich gewonnen, und dann durch Division (4 : 20 = 5) wieder aufgehoben wird. Diese abkürzende Ansatzweise würde demnach folgende seyn:

$$4 : \frac{5 \times (4)}{6 \times 4} = \frac{5}{24}$$

Weitere Aufgaben zur Einübung dieser Lösungsweise sind: $5 : \frac{7}{8} = {}_{6} = \frac{7}{\times 5}, \frac{7}{20}$; $6 : \frac{4}{9} = {}_{9}\frac{4}{\times 6} = \frac{4}{54}$ $(= \frac{2}{27})$.

Wenn der Theiler eine Theilzahl, und die Theilungszahl eine ganze Zahl ist, z. B. $\frac{3}{4} : 6$: so soll die Zahl gefunden werden, welche angibt, wie oft die bestimmte Anzahl von Theilen (3 Viertel) vom Ganzen weggenommen werden können. Wie oft viele 3 Viertel können aus 6 ganzen Aepfeln gemacht werden? Antwort: 8, denn wenn jeder Apfel in lauter Viertel zerlegt wird, so erhält man $\frac{24}{4}$; $3 : \frac{24}{4} = 8$ Mahl, denn $8 \times 3 = 24$.

Es sollen einem jeden Armen von 12 fl. jährlichen Zinsen eines Stiftungskapitals $\frac{3}{4}$ fl. ausgetheilt werden; für wie viele Arme langt diese Summe zu? Antwort: für 16, denn $12 \times 4 = 48$; und $3 : 48 = 16$.

Anm. Sehr zweckmäßig handeln Lehrer, wenn sie ihre Schüler darauf hinleiten, selbst zu bemerken, daß das Verfahren noch weiter dadurch abgekürzt werden kann, wenn man die Division der Multiplikazion vorgehen läßt, und statt z. B. in der letzten

Auf-

Aufgabe $12 \times 4 = \frac{48}{4}$; und $3 : \frac{48}{4} = 16$ anzusetzen, dagegen umgekehrt also verfährt:

$$3 : 12 = 4;\ 4 \times 4 = 16.$$

Oder in der ersten Aufgabe:

$$3 : 6 = 2;\ 2 \times 4 = 8.$$

V. Von der Regel Detri oder der schließenden Rechnungsart.

1. Vom Schlußrechnen überhaupt.

§. 71.

a) Von der eigentlichen Beschaffenheit desselben.

Aus dem ersten Kursus des Denkrechnens werden die Lehrer hierbei zuerst ihre Schüler wiederhohlungsweise zur klaren Besonnenheit ihres Thuns zu führen suchen, und sie dem zu Folge an einem einfachen Regel detri Satze selbst bemerken lassen, daß die Seele dabei schließt, oder einen Rechnungssatz aus einem andern ableitet, in welchem er schon enthalten ist. Das Beispiel sey: Wenn 1 Apfel 2 Kreuzer kostet, so kosten 2 Aepfel — 4 Kreuzer.

Der

Der Rechnungssatz welcher hier gesucht wird, ist: was kosten 2 Aepfel; abgeleitet wird er aus dem erstern Rechnungssatz: 1 Apfel kostet 2 Kreuzer, worinn die Bestimmung schon enthalten liegt, was 2 Aepfel kosten.

Vollständig lautet dieser Rechnungsschluß folgender Weise:

1 Apfel kostet 2 Mahl so viele Kreuzer;
2 Aepfel sind 2 Mahl 1 Apfel;
folglich kosten 2 Mahl 1 Apfel auch 2 Mahl 2 oder 4 Kreuzer.

In der Kunstsprache heißt der erste Satz, der Haupt oder Obersatz, der zweite der Mittel- und der dritte der Schlußsatz. Der Kürze wegen wird der mittlere gewöhnlich bloß gedacht, und nicht ausgedrückt.

Anm. Zur Erläuterung kann auch ein Schluß ohne Zahlen, z. B. folgender von dem Lehrer hierbei benützt werden: Alle Menschen sind sterblich; Alexander ist ein Mensch; folglich ist Alexander sterblich. Man kann auch hier den Mittelsatz (Alexander ist ein Mensch) der Kürze wegen weglassen, und sagen: wenn alle Menschen sterblich sind, so ist auch Alexander sterblich. Woraus zugleich hervorgeht, daß die Wahrheit jedes Schlußsatzes schon in dem Hauptsatze enthalten ist, und der Seele durch diese Entwickelung nur zum bestimmten deutlichen Bewußtseyn gebracht wird.

§. 72.

b) Von der dabei vorkommenden doppelten Schlußweise.

Bleibt man dabei stehen, daß jeder einfache Rechenschluß mit Weglassung des bloß gedachten Mittelsatzes nur aus 2 Sätzen, dem Haupt- und Schlußsatze besteht, so machen 4 Zahlglieder den ganzen Rechenschluß aus. Hiervon sind die zwei ersten mit dem Hauptsatze schon gegeben (1 Apfel kostet 2 Kreuzer); von dem zwei letztern ist das dritte bloß in der Aufgabe (was kosten 2 Aepfel?) enthalten, das vierte aber ist das noch unbekannte, welches erst gefunden werden soll. Von jenen 3 vorhandenen Zahlgliedern erhielt diese Rechnungsart den Namen der Regel detri (von drei).

Bei diesem rechnenden Schließen findet eine doppelt mögliche Verfahrungsweise statt. Die erste ist die in obiger Schlußform liegende, welche ohne Benennung einer Zahl lautet: wie sich das erste Glied (1 Apfel) zu dem zweiten Gliede (2 Kreuzer) verhält; so verhält sich das dritte Glied (2 Aepfel) zu dem noch unbekannten vierten. Nun ist das zweite Glied im obigen Beispiele noch ein Mahl so groß als das erste, folglich muß auch das vierte noch ein Mahl so groß seyn.

1 : 2	2 Mahl.
2 : 4	

Die

Die zweite Verfahrungsweise beruht auf einer bloßen Abänderung der Schlußform. Statt zu sagen, wie sich das erste Glied zu dem zweiten verhält, so verhält sich das dritte zu dem vierten unbekannten, kann man auch sprechen: wie sich das erste zum dritten verhält, so verhält sich das zweite zu dem vierten unbekannten. Da nun nach dem obigen Beispiele 1 Apfel zu 2 Aepfel sich wie das zweifache zu dem einfachen verhält; so muß sich auch das vierte unbekannte Glied zu dem zweiten (2 Kreuzer) eben so verhalten, oder die unbekannte Zahl 2 × 2 = 4 seyn. Ein weiteres Beispiel mit 4 verschiedenen Zahlen sey die Aufgabe: was kosten 3 Aepfel, wenn 1 Apfel 2 Kreuzer kostet. Der Ansatz ist folgender nach obiger veränderter Schlußweise

1 (Apfel) : 3 (Aepfel)	3 Mahl.
2 (Kreuzer) : 6 (Kreuzer)	

Die Richtigkeit des Schlusses, daß man, so viel man mehr Aepfel kauft, auch eben so viel mehr Geld dafür zahlen müsse, leuchtet nach dem nothwendigen und allgemeinen Gesetzen des Denkens einem jeden Kinde ein, wenn es darauf hingeleitet wird, diese Gesetze mit Bewußtseyn in Anwendung zu bringen.

Anm. Der Kürze wegen, muß man es den Lehrer überlassen, den weitern Bedarf zur Deutlichmachung dieser Sätze aus dem ersten Kursus herbeizuholen, wo dieser Gegenstand weitläufiger in Gesprächform abgehandelt wird.

§. 73.

c) Weitere Folgerungen daraus.

Das Verhältniß zweier Zahlenglieder, des ersten und zweiten nach der ersten Schlußweise und des ersten und dritten nach der zweiten, kann so beschaffen seyn, daß das voranstehende entweder eine größere oder eine kleinere Zahlgröße als die nachfolgende enthält.

Beispiele nach der ersten Schlußweise sind:

1) Wenn 1 Apfel 2 Kreuzer koste, so kosten 2 Aepfel 4 Kreuzer.
2) Wenn 2 Aepfel 1 Kreuzer (halb so wenig) kosten, so kosten 4 Aepfel (auch nur halb so wenig oder) 2 Kreuzer.

Dieselben Beispiele in die andere Schlußform gebracht, lauten wie folgt:

1) Wenn man statt 1 Apfel (noch ein Mal so viel oder) 2 Aepfel kauft, so muß man auch statt 2 Kreuzer (noch ein Mahl so viel als 1 Apfel kostet oder) 4 Kreuzer zahlen.
2) Wenn man statt 4 Aepfel (noch ein Mahl so wenig oder) 2 Aepfel kauft, so muß man auch statt 2 Kreuzer (noch ein Mal so wenig als 4 Aepfel kosten oder) 1 Kreuzer zahlen.

Alle diese 4 möglichen Schlußarten beruhen auf dem Hauptsatze: so viel größer oder kleiner die erste Zahl gegen die andern im ersten Rechensatze ist, so viel größer oder kleiner muß auch die erste Zahl gegen die andere im Schlußsatze seyn.

Anm.

Anm. Die Lehrer werden nicht übersehen, daß der Hauptzweck bei diesem Unterrichte seyn muß, die Schüler zum klaren Bewußtseyn der Denkgesetze, und deren Aussprüche zu bringen, um solche in allen vorkommenden Fällen richtig anwenden zu lernen. Je besser ihnen diese Absicht gelingt, desto leichter wird ihnen der folgende Unterricht werden, und desto leichtere, schnellere, Kraft entwickelnde Fortschritte werden ihre Schüler machen.

§. 74.

d) Hauptverrichtungen beim Schlußrechnen.

Die Lehrer werden sich erinnern, daß nach den in dem ersten Kursus ertheilten Aufschlüssen das Rechnen sich auf das verbindende (synthetische) und trennende (analytische) Vermögen der menschlichen Denkkraft gründet, durch deren einfache Anwendung die vier einfachen Arten der Rechenkunst, das Addiren und Multipliciren, so wie das Subtrahiren und Dividiren erzeugt werden. Das Schlußrechnen ist nichts anderes als das Gebilde von beiden Vermögen. Das Verhältniß der beiden Zahlenglieder im Hauptsatze des Rechenschlusses kann nur durch Trennen, und zwar hier durch oftmahliges hinwegnehmen derselben Zahl oder durch dividiren gefunden werden. Z. B. 1 ist in 2 zwei Mahl enthalten (kann zwei Mahl von ihm getrennt werden; 2 : 4 gleichfalls 2 Mahl; 12 : 36 drei Mahl; 12 in 37 drei und $\frac{1}{12}$ Mahl enthalten. Hat man durch das Dividiren das Verhält-

niß der beiden Zahlenglieder gefunden, so darf man solches nur auf das zweite Zahlengliederpaar oder den Schlußsatz übertragen, um das noch fehlende vierte Glied zu erhalten. Dieß kann nur durch das Multipliziren oder das Verbinden der dritten Zahl so oft Mahl mit sich selbst geschehen, als das aufgefundene, in Zahlen gleichfalls ausgedrückte Verhältniß zwischen den beiden ersten Zahlengliedern solches bestimmt. Z. B. wieder die obige Aufgabe 1:2=2. Nachdem in der ersten das Verhältniß als noch ein Mahl so groß (2×1) gefunden worden war, so würde auch das dritte Zahlenglied 2 eben so oft, nähmlich 2 Mahl mit sich selbst verbunden, und dadurch das gesuchte vierte Glied, 4, gefunden.

Die Regel des Verfahrens beim Schlußrechnen lautet folglich eigentlich: dividire das erste Glied mit dem zweiten, und mit dem gefundenen Quotienten multiplizire das dritte Glied, so hast du das gesuchte vierte Glied gefunden.

Man erhält jedoch immer einerlei Erzeugniß, man mag nach dieser Regel verfahren, oder zuerst die Multiplikazion des dritten mit dem zweiten vornehmen, und dann in das Erzeugniß von beiden das erste Glied dividiren. Denn wenn man in der obigen Aufgabe

1 : 2 = 2

zuerst 2 mit 2 multiplizirt (2×2=4), und dann das erste Glied in das Produkt dividirt (1:4=4), erhält man eben so das vierte Glied 4 als wenn man nach obiger Regel verfahren und sprechen würde: 1:2=2

Mahl;

Mahl; 2 Mahl 2 = 4. Oder noch ein anderes Beispiel

2 : 6 = 10

Nach obiger Regel dividirt man das erste Glied in das zweite und erhält den Quotienten 3; und 3 × 10 = 30, das gesuchte vierte Glied. Verfährt man umgekehrt, und multiplizirt zuerst 6 × 10, so erhält man das Erzeugniß 60; in dieses das erste Glied hierauf dividirt, gibt den Quotienten 30 als das gesuchte vierte Glied.

Es ist mithin in Rücksicht des Erfolges ganz einerlei, ob man mit dem Dividiren oder mit dem Multiplizirell anfängt. Nur die erste Verfahrungsweise stimmt mehr mit der Forderung überein, sich an die naturgemäßeste Lehrart zu halten. Sie wird daher auch hier zu Grunde gelegt, um Lehrer und Schüler bei Besonnenheit ihres Thuns zu erhalten und sie eben dadurch vor Angewöhnung an eine blinde mechanische Handlungsweise zu bewahren.

Anm. Man erstaunt nicht ohne Ursache, auch in den besten Rechenbüchern nur eine Anweisung zu einem mechanischen Rechnen zu finden. Nirgends werden die Schüler auf den Grund dieser Regel detri hingewiesen, die sie in den Stand gesetzt haben würde, die Regel selbst auf eine besonnene Weise zu finden, und eben dadurch auf eine selbstthätige, nur allein wahrhaft bildende Weise zu verfahren. So aber scheint es, daß die Verfasser selbst den Grund dieser Regel nicht gehörig klar aufgefaßt, sondern letztere meistens nur von ihren Vorgängern blindlings angenommen haben. Dieser Vorwurf

trifft

trifft selbst mehrere Mathematiker, welche sich nicht zur Einsicht erhoben haben, daß der Raum und die Zeit so gut, wie aller übriger Stoff den Gesetzen des Denkens unterworfen ist, und daß für beide nicht zweierlei Gesetze vorhanden sind.

§. 75.

e) Verschiedene schriftliche Ansatzweise beim Schlußrechnen.

Oben wurde schon nachgewiesen, daß es eine doppelte Schlußform, und mithin auch eine doppelte Ansatzweise im Allgemeinen gibt. Man kann entweder nach der ersten Schlußweise dabei den Hauptsatz mit seinen zwei Zahlgliedern voranschicken, und darauf den Schlußsatz folgen lassen. Z. B. wenn 1 Apfel 2 Kreuzer kostet, so kosten 3 Aepfel? (6 Kr.) Oder man kann das erste und dritte Glied, gleichnahmig zusammenstellen z. B. wie sich 1 (Apfel) zu 3 (Aepfeln) verhält, so verhalten sich 2 (Kreuzer) zu? (6 Kreuzern).

Aber dieß betrifft nur die innere, wesentliche Form, die nicht mit der äussern, und daher unwesentlichen zu verwechseln ist, wobei in Frage kommt: wie sich dergleichen Rechenschlüsse, zumahl bei verwickelten Fällen, wo eine größere Menge von Zahlen vorkommt, durch Ziffern nicht nur auf das kürzeste, sondern auch so darstellen läßt, daß man daraus die richtige Verhandlung des Gegenstandes leicht übersehen kann.

Die

Die bisherige äussere Form war folgende, nach welcher das zweite und dritte Glied miteinander multiplizirt, und dann in das Produkt mit dem ersten Gliede dividirt wurde.

2 : 4 = 3 ?
      4 ×
2 : 12 | 6 die gesuchte vierte Zahl.

Oder nach der Grundregel, die mit dem Dividiren anzufangen befiehlt:

2 : 4 = 3 ?
2 : 4 | 2 × 3 = 6 die gesuchte vierte Zahl.

Bei dieser geradlinichten Form könnte der gefundene Quotient als Multiplikator sogleich über die Zahlenlinie zur Ersparung vieler Schreiberei gesetzt werden. Z. B.

×2   ×2
2 : 4 = 3 : 6

Oder, um auch das zweimalige Ansetzen des gefundenen Vervielfältigers 2 zu ersparen, könnte man ihn auch in die Mitte über die beiden Gliederpaare setzen:

2
2 : 4 = 3 : 6 oder 2 : 4 (2 ×) 3 = 6.

Auch könnte man die Gliederpaare untereinander setzen, und die Verhältnißzahl auf die Seite. Z. B.

2 : 4 | 2   oder nach der andern   2 : 3 | $1\frac{1}{2}$.
3 : (6) | Grundform   4 : (6) |

Ferner

Ferner lassen sich die Gliederpaare selbst durch eine senkrechte Linie auf folgende Weise theilen,

2	4	oder mit der	?	3	
?	3	Frage voran:	2	4	
2 : 12 = 6			2 : 12 = 6.		

In beiden Ansätzen wird das dritte und vierte Glied zuerst multiplizirt ($4 \times 3 = 12$) das Erzeugniß darunter gesetzt, und dann mit dem ersten Gliede (2) in solches dividirt.

Endlich kann dieser Rechenschluß auch zu einer Theilzahl gestaltet werden, wie in Hinsicht des Hauptsatzes, der eine Divisionsaufgabe enthält, §. 48 nachgewiesen worden ist. 2:4 kann auch geschrieben werden $\frac{4}{2}$, denn 4 enthält das Theilganze zwei Mahl, oder 4 Zweitel. Hiernach ist die Ansatzweise folgende:

$$\frac{4}{2} \mid 2 \times 3 = 6.$$

Anm. 1. Ich finde es darum zweckmäßig diese verschiedenen Ansatzweisen mit den Schülern durchzugehen, weil sie dadurch theils selbst mit dem Geiste des Verfahrens recht vertraut gemacht und vor blinder Anhänglichkeit an eine einzige Form um so leichter bewahret werden, theils weil sie sich dadurch in die vorkommenden Ansatzweisen anderer um so leichter finden lernen.

2. Bei dieser Gelegenheit können die Schüler zugleich darauf aufmerksam gemacht werden, daß sich alle diese Aufgaben auch umkehren lassen, und

da-

dadurch einen Beweis von der Richtigkeit der Rechnung liefern. Denn ich kann auch den vollständig gemachten Hauptsatz z. B. in dem letzten Beispiele, 3:6 zum Hauptsatze machen, und sagen: wenn 3 Aepfel 6 Kreuzer kosten, so kosten 2? (4)

3 : 6 (2⨯) 2 = 4.

§. 76.

f) Von der Abkürzungsweise beim Schlußrechnen.

Das Verhältniß der beiden Gliederpaare in der zuletzt gelösten Aufgabe ist sich völlig gleich, ob sie gleich 4 ganz verschiedene Zahlen enthalten. Die zweite Zahl in jedem Gliederpaare beträgt 2 Mahl so viele Einheiten als die erste; denn 6 ist 2⨯3 und 4 ist 2⨯2. Diese Gleichheit bleibt dieselbe auch bei Gliederpaaren von höhern Zahlen, z. B. 6:12; 12:24; 30:60; 48:96; 200;400; 312:624; denn das zweite Glied ist immer nicht weniger oder mehr als 2 Mahl so groß denn das erste.

So wie hinaufwärts, so auch hinabwärts. 312 verhält sich zu 624, wie 12:24, oder wie 6:12, oder 3:6 oder 1:2.

Je geringer die Zahlen sind, je weniger Arbeit gibt es beim Rechnen. Auf je kleinere Verhältnisse man daher ein aus großen Zahlen bestehendes Gliederpaar zurückbringen kann, desto weniger Zahlen hat man zu schrei-

schreiben. Dieß geschieht schon durch die Division des ersten Gliedes mit dem zweiten; z. B. 312 Aepfel wurden um 624 Kreuzer gekauft: wie hoch kommen 10 Aepfel. Nach der alten Ansatz- und Berechnungsweise würde man folgende Berechnung zu machen haben:

a) in ebener Linienform,

312 Aepfel : 624 Kreuzer = 10 Aepfel?

```
        10
312 | 6240 | 20 das gesuchte vierte Glied.
      624
      ───
        0
```

b) Nach der Spaltungsform durch eine senkrechte Linie

```
   ? | 10 Aepfel, wenn die Aepfelzahl von
 312 | 624 Kr. koste
─────────────
 312 | 6240 | 20 das gesuchte vierte Glied.
```

Nach der bei dieser Denkrechnungsmethode vorgezogenen Form

312 : 624 (2×) 10 = 20

weil das Verhältniß von 312 : 624 gleich ist dem Verhältniß 1 : 2.

Eben deßwegen kann auch das größere Gliederpaar ausgestrichen und dafür 1 : 2 gesetzt werden

```
    ? | 10          1 : 2 (2×) 10 = 20.
(312) | (624)
    1 | 2
──────┼──────
    1 | 20 | 20
```

Bei

Bei Zahlen mit Nullern ist es um so leichter, weil nur diese ausgestrichen (oder wie hier, eingeklammert) werden dürfen. Z. B.

2(0) : 4(0) (2 ⋈) 13 = 26. 2(00) : 5(00) (2½ ⋈) 6 = 15.

Anm. Es ist für unsere Denkschüler hinreichend, sie mit dieser Abkürzungsweise und deren Grunde in einfachen Beispielen bekannt gemacht zu haben. Die Anwendung auf schwerere Aufgaben werden sie in der Folge von selbst praktisch auffinden. Jedoch hindert dieß die Lehrer nicht, ihnen hierüber noch einige andere einfache Aufgaben dieser Art aufzugeben, oder wohl selbst von ihnen auffinden zu lassen.

2. Vom Schlußrechnen mit ganzen Zahlen.

§. 77.

a) Wenn das erste Glied des Hauptsatzes kleiner ist als das zweite.

Diese Aufgaben sind am allerleichtesten zu berechnen, zumal wenn dazu nur Beispiele gewählt werden, in welchen dieses erste Glied zugleich ein erschöpfender Theiler des zweiten oder dritten Gliedes ist. Z. B.

6 : 30 (5 ⋈) 12 ? (60) oder 6 : 12 | 2
30 : (60)

24 : 72 (3 ⋈) 120 ? (360) oder 24 : 120 (5 ⋈) 72 ? (360)

7 : 28 (4 ⋈) 35 ? (140) oder 7 : 35 (5) 28 : (140).

Oder

Oder mit Angabe der Namen, welche diese Zahlen oft im gemeinen Leben führen:

Wenn 9 Ellen Tuch 45 Gulden kosten, was kosten 27 Ellen?

9 : 45 (5 ×) 27 ? (135) oder 9 : 27 (3 ×) 45 ? (135)

Wenn man für 3 Batzen 11 Eier bekommt, wie viel bekommt man um 6 Batzen?

3 : 12 (4 ×) 6 ? (24) oder 3 : 6 (2 ×) 12 ? (24).

Anm. Bloß um die Glieder des Rechenschlusses zu unterscheiden, werden hier benannte Zahlen genommen, von denen eben deshalb, weil sie nicht die Hauptsache sind, die Schüler nur allgemeine Kenntniß zu haben brauchen.

Wenn 6 Personen 216 Pfund Brod monatlich verbrauchen, wie viele Pfund brauchen 12 Personen in derselben Zeit?

6 : 216 (36 ×) 12 ? oder 6 : 12 (2 ×) 216 ?

```
  36           2
 ----        -----
  72          432
  36
 ----
 432
```

Wenn ein kleines Heer von 5000 Mann jährlich im Ganzen 750,000 Gulden zu unterhalten kostet, was kostet ein Heer von 60,000 Mann?

```
5|000 : 750|000 (150) 60,000 ?
                       60,
              ---------------
              9,000,000 Millionen Gulden.
```

Oder

Oder nach der zweiten Schlußweise, wo von dem Verhältnisse des ersten zum dritten Gliede, auf das Verhältniß des unbekannten vierten zu dem zweiten geschlossen wird.

5|000 : 60|000 (12✕) 750,000 :
12
―――
150
75'
―――
9,000,000

Noch leichter ist die Lösung, wenn das erste Glied eine Eins ist, weil mit diesem Elemente aller Zahlen weder dividirt noch multiplizirt zu werden braucht, da die Theilungszahl zugleich der Quotient, und das Erzeugniß ist: 1 in 3 ist 3; und 4✕1 ist 4. Z. B.

Wenn 1 Scheffel Korn 40 Gulden kostet, was kosten 8 Scheffel?

1 : 40 (40✕) 8? oder 1 : 8 (8✕) 40:
8 ― 320 ― 8 ― 320

Wenn 1 Elle Leinwand 52 Kreuzer kostet, was kostet ein Stück von 46 Ellen?

1 : 52 = 46 oder 1 : 46 = 52 :
52
―――
96
230

60 | 2396 Kreuzer | 39 Gulden 56 Kreuzer
180
―――
596
540
―――
56

§. 78.

b) Wenn das dritte Glied kleiner ist, als das erste.

Auch hier ist die Auflösung nach der ersten Schlußform, leicht, wenn die Glieder in einem erschöpfenden Verhältnisse stehen; dagegen nach der zweiten weitläufiger und daher mühsamer, weil das Verhältniß des ersten Gliedes zu dem dritten nur durch eine Theilzahl ausgedrückt werden kann. Z. B.

Wenn für eine Holzlieferung von 16 Klaftern 48 fl. als Preis ausgemacht worden sind, und es konnten nur 12 Klafter geliefert werden, wie viel hat der Lieferant einzunehmen?

16 : 48 (3 ⋈) 12 ? (36)

Nach der zweiten Schlußform stehen 16 : 12 in dem Verhältnisse wie $\frac{12}{16}$ oder $\frac{3}{4}$, oder 12 enthält ein Viertel weniger als 16. Um die vierte Zahl zu finden, welche mit der zweiten oder 48 in gleichem Verhältnisse steht, muß man den Betrag des vierten Theiles derselben erst aufsuchen, und dann diesen 3 Mahl nehmen, so wie auch von dem ersten Gliede 16 eben dieser Theil erst gefunden werden müßte, davon 3 solcher Theile (3 ⋈ 4) die dritte Zahl 12 ausmachen. Der Ansatz ist folgender:

16 : 12 ($\frac{3}{4}$) 48 : 36 denn 4 : 48 = 12 ⋈ 3 = 36.

Oder man bleibt bei dem noch natürlichern und einleuchtendern Verfahren stehen, nach welchem der Quotiente

tient des ersten Zahlenpaares zuerst nicht mit Zahlen, sondern mit Worten ausgedrückt wird:

16 : 12 (= 3 Viertel und 3 Viertel ×) 48 = 144 Viertel

144 Viertel aber sind? 4 : 144 | 36.
12
—
24
24
—

Nachdem die Schüler dieses mit völliger Klarheit eingesehen haben, führe man sie auf die Bemerkung wieder zurück, daß man in jedem Falle einerlei Produkt erhält, ob man zuerst die Multiplikazion und sodann die Division vornimmt, oder umgekehrt verfährt, wie oben geschehen ist.

Ist das dritte Glied eine Eins, so ist die Berechnung nach der ersten Schlußform folgende

3 Klafter Holz kosten 12 Gulden (4 ×) wie viel 1 Kl.?
4 Gulden, denn 4 × 1 = 4 fl.

und nach der zweiten:

3 Klftr. : 1 Klftr. ($\frac{1}{3}$ ×) 12 : 4; denn 1 × 12 Drittel ist 12 Drittel, und 12 Drittel Gulden (3 : 12 =) machen 4 ganze Gulden.

Da die Schüler hierdurch zu gleicher Fertigkeit in beiden Schlußformen gelangt sind, so überläßt man ihnen nunmehr der eigenen Prüfung, welche von folgenden Aufgaben leichter nach der ersten oder der zweiten auszurechnen sind.

1) Wenn 3 Arbeiter täglich 5 Maaß Bier erhielten, wie viel muß man 12 Arbeitern abreichen, wenn sie hierin mit jenen gleich gehalten werden sollen? Da 3 in 5 ein Mahl 3 und zwei Mahl der dritte Theil ($1\frac{2}{3}$) enthalten ist, so würde hier nach der ersten Schlußart eine, wenn auch nicht schwere, doch weitläufigere Berechnung statt finden, wie folget

$3 : 5\,(1\frac{2}{3})\ 12\ ?$ $1 \times 12 = 12$

2 Drittel $\times$ 12 = 24 Drittel;

24 Drittel = 8 Ganze denn 3 : 24 = 8.

8 + 12 = 20 (die gesuchte vierte Zahl.

Dagegen ist die Berechnung nach der zweiten Schlußart sehr leicht abgethan, denn

$3 : 12\ (4 \times)\ 5 = 20.$

2) Wenn 12 Personen monatlich 432 Pfund Brod bedürfen, wie viel Brod bedürfen 6 Personen? Hier wird den Schülern sogleich einleuchten, daß das Verhältniß der kleinen Zahlen 12 und 6 kürzer aufzufinden ist, als das Verhältniß der Zahl 12 zu 432. Statt folglich zu schreiben

$12 : 432\ (36 \times)\ 6 = 216$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 72 \\ 72 \\ \hline \end{array}$$

werden sie also verfahren: $12 : 6\ (\frac{1}{2} :)\ 432 = 216.$

3) Wenn man um 12 Kr. 24 Aepfel kauft, wie viel bekömmt man um 3 Kr.

4) Wenn

4) Wenn ein Knabe 24 Federkiehle um 28 Kr. kaufte, und er soll davon 6 Kiele einem andern Schüler abgeben, wie viel muß dieser ihm dafür zahlen?

5) Wenn man in 1 Jahre, folglich in 12 Monaten, 600 fl. Einnahme hat, wie viel kommen davon auf 3 Monate?

6) Wenn 12 Pfund Unschlitt 100 Lichter (Kerzen) geben, wie viel wird man von 6, von 3, von 4 Pfund erhalten?

7) Es hat Jemand 3 Fuder Wein um 864 Gulden gekauft, wovon er 2 Fuder sogleich, und 1 Fuder in 4 Wochen bezahlen soll. Wie viel beträgt die erste und die zweite Summe?

8) Wenn von 100 fl. jährlich 5 fl. Zinsen gegeben werden, was tragen, 20, 30, 60, 80, 10, 5 fl. jährliche Zinsen?

9) Wenn die Zeche einer Gesellschaft von 8 Personen 20 fl. beträgt, wie viel kommt davon auf einen Vater, der mit 2 Söhnen dazu gehörte?

10) Auf eine Gemeinde von 60 Familien rechnet man im Durchschnitte 40 Schulkinder; wie viel beträgt diese Zahl bei einer Dorfschaft von 36 Familien?

Anm. 1. Die Lehrer werden hierbei erinnert, ihre Schüler, wenn sie diese Aufgaben ordentlicher Weise gelöset haben, nun auch noch mit allem Fleiße anzuhalten, dasjenige in Anwendung zu bringen, was oben über die Abkürzungsweise gelehrt wurde. So können zum Beispiele die Zahlen in der Aufgabe 10 auf folgende verschiedene Weise gegenseitig aufgeho-

gehoben, und dadurch das Rechnungsgeschäft erleichtert werden. Z. B.

a) 60 : 40 = 6 : 4 = 3 : 2 (⅔) 36 ?

b) Selbst letztere Aufgabe kann noch weiter verringert werden, da das erste Glied (3) und das dritte (36) sich auf 1 : 12 zurückbringen lassen:

(3) : 2 (2 ⋈) (36)
1 2 ⋈ 12 = 24.

c) Bei Ansetzung nach der zweiten Schlußform; wenn, durch den Theiler 12 beide Zahlen vermindert werden.

(60) : (36) (⅗ ⋈) 40 = 120; 5 : 120 = 24
5 3

d) Und durch weite Verminderung mit dem Theiler 5.

(5) : 3 (3 ⋈) (40)
1 8 = 24.

denn wie sich 5 zu 40 verhält, so verhält sich auch 1 zu 8. — Auf diesem Wege lernen die Schüler schon vorbereitungsweise den Grund der Kettenregel begreifen, der gewöhnlich nur als ein bloßes mechanisches Rechenkunststück angesehen und betrieben wird. Aus unsern Schulen soll aber der Mechanismus durchaus vertrieben werden, und dafür aus ihnen Menschen hervorgehen, die sich zur Besonnenheit ihres Thuns in allen Stücken erhoben haben.

Anm. 2. Aufgaben, welche im dritten Gliede die Zahl 1 enthalten, dürfen wir den Lehrern und Schülern zur eigenen Erfindung und Lösung überlassen.

lassen. Denn welcher auch von den letztern, wenn er nach dieser Anweisung richtig geleitet worden ist, wird nicht von selbst bemerken, daß hierbei bloß eine Division zu machen ist. Z. B. Wenn

(20) Eier (30) Kr. kosten, so kostet 1 Ei?

2 3 ($1\frac{1}{2}$ ×) 1 = $1\frac{1}{2}$ Kr.

oder wenn

(40) Eier (20) Kreuzer kosten, so kostet 1 Ei?

4 : 2 ($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ×) 1 = $\frac{1}{2}$ Kr.

oder mit dem noch leichtern Beispiele: wenn 2 Ellen : 4 fl. kosten = was kostet 1 Elle?

§. 79.

c) Wenn das zweite Glied kleiner als das erste ist.

Anstatt daß diese Aufgaben, zu welchen wir jetzt vorrücken, unsern Denkschülern schwieriger zu lösen werden sollten, werden sie ihnen bei richtiger Leitung immer leichter, weil die von ihnen hierbei geforderte ganze Kunst nur darin besteht, das bereits Erlernte und Wohlbegriffene auf weitere neue Fälle anwenden zu lernen. Sie wissen schon, daß wenn die zweite Zahl eines Gliederpaares kleiner als die erste ist, das Verhältniß nur durch eine Theilzahl ausgedrückt werden kann, z. B. 2 : 1 verhält sich zusammen als ein $\frac{1}{2}$ denn 1 ist ja die Hälfte von 2; 3 : 2 verhält sich wie $\frac{2}{3}$; denn 2 sind ja 2 Theile von dem Ganzen 3. — Eben so wissen sie, daß sich die Verhältnisse immer gleich bleiben, sie mögen durch gleich

große

große oder gleich kleine Zahlen ausgedrückt werden; aber daß durch Hülfe der letztern das Verfahren sehr abgekürzt und erleichtert werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen sind ihnen folgende Aufgaben zur selbstständigen Lösung aufzugeben:

1) Wenn 84 ℔ Flachs 24 fl. kosten, was kosten 14 ℔? —

Es ist hierbei nur das Verhältniß der Zahlenglieder abzukürzen. 84 : 24 oder $\frac{24}{84}$ lassen sich durch 12 auf 7 : 2 oder $\frac{2}{7}$ zurückbringen. Die Berechnung ist daher folgende:

$$84 : 24 = 7 : 2 \left(\tfrac{2}{7} \times\right) 14 = \tfrac{28}{7} = 4 \text{ fl.}$$

Will man auch dieses noch abkürzen, so kürze man das erste und dritte Glied (7 : 14) ab durch das gleiche Verhältniß 1 : 2 (nach der zweiten Schlußform)

$$(7) : 2\ (2 \times)\ (14)$$
$$1 : 2\ \left(= \tfrac{1}{2} \times\right) 2 = 4$$

oder $7 : 14 = 1 : 2\ (\times)\ 2 = 4.$

Auch lassen sich 84 : 14 durch 7 auf das Verhältniß von 12 : 2 zurückbringen, denn $12 \times 7 = 84$; und $2 \times 7 = 14$. 12 : 2 ist aber gleich 6 : 1 (1 ist der 6te Theil von 6) $= \frac{1}{6}$; $\frac{24}{6}$ aber sind 4 Ganze. Der Ansatz ist folgender:

$$84 : 14 = 12 : 2 = 6 : 1 = \tfrac{1}{6}\ (\times)\ 24 = \tfrac{24}{6} = 4.$$

Damit aber bei dieser Gelegenheit die Schüler (und mit ihnen die Lehrer) begreifen, wie die Menschen aus bloßer Scheu vor dem leidigen Nachdenken das Mechanische beim Rechnen vorziehen konnten, lasse man diese Aufgabe nach der alten mechanischen Regel lösen, welche

zuerst

zuerst das zweite mit dem dritten Gliede multipliziren, und in das Erzeugniß mit dem ersten Gliede auf folgende Weise dividiren läßt.

84 ℔ : 24 fl. = 14 ℔?

```
          24
         ----
          56
          28
         ----
84 |     336 | 4
         336 |
         ----
```

wobei aber der Verstand nichts zu begreifen hat.

Noch leichter werden folgende Aufgaben den Schüler zu lösen seyn:

2) Wenn 6 Aepfel 3 Kreuzer kosten, was kosten 24 Aepfel. Hier kann die zweite Schlußform am leichtesten zur Auffindung der vierten unbekannten Zahl führen; denn 6 : 24 verhält sich wie 1 : 6 oder 24 ist 4 ⋊ 6; und 4 ⋊ 3 = 12. — Aber man nöthige seine Schüler, auch auf dem schwererem Wege die Aufgabe zu lösen, damit ihnen selbst das Schwere zuletzt zum Leichten werde.

$6 : 3 = 2 : 1$ oder $\frac{1}{2}$ (⋊) $24 = 12$ (oder $\frac{24}{2} = 12$).

3) 24 Klftr. Holz wurden von einer bestimmten Anzahl Taglöhnern in 4 Tagen gemacht, wie viele Tage werden sie brauchen, um 180 Klftr. zu verfertigen.

Nach der ersten Schlußart;
$24 : 4 = 6 : 1 = \frac{1}{6} \times \frac{180}{6} = 30.$

nach der zweiten.
24 : 180 (weil sich beide durch 12 theilen lassen) $= 2 : 15 (7\frac{1}{2} \times) 4 = 30.$

Anm.

Anm. Man kann nun auch mit den Schülern anfangen, diese Aufgaben sowohl zur Probe richtiger Rechnung als zu weiterer Uebung im Rechnen von ihnen umgekehrt lösen zu lassen. Wenn also, wie so eben gefunden wurde, 180 Klftr. von diesen Taglöhner in 30 Tagen verfertiget worden sind, wie viele Tage werden sie zur Verfertigung von 24 Klaftern brauchen.

$$180 : 30 = 18 : 3 = 6 : 1 = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{24}{6} = 4.$$

Bei allen diesen Aufgaben gilt als Grundregel des Verhaltens für den Lehrer, daß er nicht eher weiter schreite, als bis er gewiß weiß, daß seine Schüler ganz auf den Grund ihres Rechenverfahrens sehen.

§. 80.

d) Vermischte Aufgaben.

1) Wenn 10 Eier 11 Kreuzer kosten, was kosten 6 Eier?

$$10 : 11 = \tfrac{11}{10} \times 6 = \tfrac{66}{10} = 6\ (\tfrac{6}{10})\ \tfrac{3}{5} \text{ Kr. oder}$$

$$10 : 6\ (\tfrac{6}{10} = \tfrac{3}{5} \times)\ 11 = \tfrac{33}{5} = 6\tfrac{3}{5}.$$

2) Wenn 15 Ellen Tuch 46 fl. kosten; was kosten 6 Ellen, die der Käufer einem Freunde davon abgibt?

$$15 : 46\ (3\tfrac{1}{15} \times)\ 6 = 18\ (\tfrac{6}{15})\ \tfrac{2}{5} \text{ fl. oder } 15 : 6\ (\tfrac{6}{15} = \tfrac{2}{5} \times)$$

$$46 = \tfrac{92}{5} = 18\tfrac{2}{5} \text{ fl.}$$

3) Ein gewisser Bothe läuft in 4 Stunden Zeit 5 Stunden Weges; welchen Weg könnte er bei gleicher Geschwindigkeit im Laufen in 10 Stunden zurücklegen?

4 : 5

$4 : 5 \ (1\frac{1}{4} \times) \ 10 = 10 + (\frac{10}{4}) \ 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ St. oder

$4 : 10 \ (2\frac{1}{2} \times) \ 5 = 10\frac{5}{2} = 12\frac{1}{2}$ St.

4) Für 4 Morgen Feld gab ein Bauer jährlich 23 fl. Pacht an einen Gutsbesitzer; er übernimmt um gleichen Pachtpreis noch 31 Morgen von ihm; wie viel muß er von diesen letztern Pachtgeld zahlen?

$4 : 23 \ (5\frac{3}{4} \times) \ 31 = 155 + \frac{93}{4} \ (= 23\frac{1}{4})$ oder

$23\frac{1}{4}$

$178\frac{1}{4}$ fl.

$4 : 31 \ (7\frac{3}{4} \times) \ 23 = 161 + \frac{69}{4} \ (= 17\frac{1}{4})$

$17\frac{1}{4}$

$178\frac{1}{4}$ fl.

5) Wenn 18 Personen wöchentlich 8 fl. verzehren, wie viel werden bei gleichem Aufwande 12 Personen verzehren?

$18 : 8 \ (\frac{4}{9} \times) \ 12 = \frac{48}{9} = 5 \ (\frac{3}{9}) \ \frac{1}{3}$ oder

$18 : 12 \ (\frac{2}{3} \times) \ 8 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

6) Eine Köchin erhielt jährlich, mithin für 52 Wochen, 39 fl. Lohn versprochen; wie viel hatte sie bei ihrer Entlassung nach 17 Wochen zu fordern?

$52 : 39 \ (\frac{3}{4} \times) \ 17 = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}$ oder $52 : 17 \ (\frac{17}{52} \times) \ 39$

17

273

39

52 | 663 | 12

52

143

104

$\frac{39}{52}$ (13) | $\frac{3}{4}$.

7) Ein Lieferant erhielt für 96 Scheffel Hafer 289 fl.; er mußte 576 Scheffel um gleichen Preis nachliefern, und hatte dafür einzunehmen?

$96 : 289 \; (3\tfrac{1}{96} \times) \; 576$ oder $96 : 576 \; (6 \times) \; 289$

	3	6
	1728	1734
96 | 576 |	. . . 6	
	1734	

8) Ein Kaufmann zahlte einem Bandfabrikanten für 7296 Ellen die Summe von 765 fl.; er ließ sich 152 Ellen um gleichen Preis nachgeben; wie viel mußte er ihm dafür noch zahlen?

$$7296 : 765 = \frac{765}{7296} \overset{3}{|} \frac{255}{2432} \; (\times) \; 152$$

255
760
760
304
2432 | 38760 | 15 fl.
2432
14440
12160
2280
$\frac{2280}{2432} \overset{152}{|} \frac{15}{16}$ fl.

Nach der zweiten Schlußart:

$$7296 : 152 = \frac{152}{7296} \overset{152}{|} = (\tfrac{1}{48} \times) \; \tfrac{765}{48} = 15 \; (\tfrac{45}{48} =) \; \tfrac{15}{16} \text{ fl.}$$

Wollte man in diesem Falle, wo der Theiler nicht erschöpfend ist, mit der Multiplikazion des zweiten und dritten Gliedes anfangen, und das erste Glied, zur Umgehung der Rechnung mit Theilzahlen in das Erzeugniß divi-

dividiren, wodurch allerdings auf die oben erklärte Weise die unbekannte vierte Zahl gleichfalls zu finden ist, so würde die Berechnung, wie folgt, nicht kürzer ausfallen, als die erstere.

7296 : 765 = 152?

```
          152
        ------
         1530
        3825
        765
     -----------
7296 | 116280 | 15
       7296   |
     ---------
       43320
       36480
      --------
        6840  228    2
        ----  ---|  ---| 
        7296  | 30/32 | 15/16
```

9) Ein Wirth hat aus 3 Eimern Bier 15 fl. gelöset, wie theuer hat er die Maaß ausgeschenkt? — Den Schülern ist hierbei zu sagen, daß 1 Eimer 60 Maaß enthalte, und daß sie erst das erste und dritte Glied unter eine Benennung bringen müssen, weil nur von gleichen Dingen auf Gleiches geschlossen werden könne.

180 Maaß : 15 fl. ($\frac{15}{180} = \frac{1}{12}$ ×) 1 Maaß = $\frac{1}{12}$ fl. (= 5 Kr.)

10) Eine Hausmutter dingt eine Dirne um 12 fl. Jahreslohn, 8 Ellen flächserne und 12 werkerne Leinwand; nach 39 Wochen verläßt sie ihren Dienst, und hat daher für diese Zeit zu fordern?

a) 52 Wochen : 39 Wochen (= $\frac{3}{4}$ ×) 12 fl. = $\frac{36}{4}$ = 9 fl.

oder

52 : 12 ($\frac{3}{13}$ ×) 39 = $\frac{117}{13}$ = 9 fl.

b)

b) $52 : 39 \left(= \frac{3}{4} \times\right) 8 = \frac{24}{4} = 6$ Ellen.
c) $52 : 39 \left(= \frac{3}{4}\right) 12 = \frac{36}{4} = 9$ Ellen.

11) 20 Kronenthaler machen 54 fl. aus, wie viel 4 Kronenthaler?

$$20 : 54 \left(= 2 \left(\tfrac{14}{20}\right) \tfrac{7}{10} \times\right) 4 = 8$$
$$\tfrac{28}{10} = 2 \left(\tfrac{8}{10}\right) \tfrac{4}{5}$$
$$10 \tfrac{4}{5} \text{ fl.}$$

12) 16 ℔ Kaffee kosten 12 fl. 24 kr.; wie viel kostet 1 ℔? Hier muß das zweite Glied unter eine Benennung gebracht werden. 1 fl. = 60 Kr.; 12 fl. = 12 × 60 = 720 Kr.

$$16 : 720 \,(45 \times)\, 1 = 45 \text{ Kr.}$$

§. 81.

e) Von der dritten, der umgekehrten, Schlußart.

Die nun folgenden Aufgaben sind nur insofern schwer zu nennen, weil sie etwas mehr Nachdenken als die bisherigen erfordern. Wer aber darin schon geübt ist, und solches auch dabei mit Sorgfalt anwendet, wird leicht jede Schwierigkeit besiegen.

1) Eine kleine Festung ist mit 250 Mann Soldaten besetzt, und für diese auf 4 Monate mit Lebensmitteln versehen; es werden aber dahin noch 70 Mann nachgesendet; wie lange wird nun der Vorrath ausreichen? In diesem Falle können die Lebensmittel bei einem solchen Zuwachse an Verzehrern unmöglich weiter langen als bei

einer

einer geringern Anzahl von Soldaten. Es darf daher nicht geschlossen werden, wie beim Solde, der z. B. bei den 250 Mann monatlich 1000 fl. ausmachen soll: je mehr Mannschaft desto mehr Sold; sondern umgekehrt: je mehr Mannschaft, desto geringer die Zeit, für welche die Lebensmittel zureichen. Oder in dem Verhältnisse als die Mannschaft wächst, in dem Verhältniß nimmt die Zureichenheit der Lebensmittel ab. Der Ansatz muß daher in folgender verkehrter Schlußart verfertiget werden:

a) statt nach der ersten Schlußart zu setzen

$250 : 4 = 320$? wodurch man $5\frac{3}{25}$ Monat erhalten würde, ist vielmehr zu setzen:

$$320 : 4\ (\tfrac{1}{80} \times)\ \tfrac{250}{80} = \tfrac{25}{8} = 3\tfrac{1}{8}$$

b) oder nach der zweiten Schlußart (statt $250 : 320 = 4$)

$$320 : 250\ (= \tfrac{25}{32} \times)\ 4 = \tfrac{100}{32} = 3\ (\tfrac{4}{32})\ \tfrac{1}{8}$$

c) oder in wie fern es eine neue dritte Schlußform, die umgekehrte ist, nach ordentlichen Ansatz: so wie sich 250 (die kleinere Zahl von Mannschaft verhält zur größern): 320; so verhält sich umgekehrt die Zeitdauer der Lebensmittel, mithin

$250 : 320 = \frac{32}{25}$ (X d. h. umgekehrt $=$) $\frac{25}{32} \times 4 = \frac{100}{32} = 3\frac{1}{8}$.

Anm. 1) Auch kann man die 250 Mahl 4 monatl. Porzionen in eine Summe bringen (= 1000) und in diese die 320 Mann vertheilen, um die vierte Zahl zu finden:

$250 \times 4 = 1000;\ 32(0) : 100(0) = \frac{100}{32} = 3\ (\frac{4}{32})\ \frac{1}{8}$.

2) Auch

2) Auch kann man nur die Verfahrungsweise umkehren und folglich mit der Multiplikazion bei dem ersten Zahlenpaare anfangen. Z. B.

$$25(0) \times 4 = \frac{100}{32} = 3\frac{1}{8}.$$

2) 600 Mann würden mit den Lebensmitteln auf einem Schiffe 10 Monate auskommen; wie lange aber damit 1000 Mann?

$600 : 1000 = \frac{10}{6}$ umgekehrt $\frac{6}{10} \times 10 = \frac{60}{10} = 6$ Monate.

3) Wenn 1000 Mann 6 Monate lang mit den auf einem Schiffe befindlichen Lebensmitteln auskommen würde, wie viele Mannschaft würde man nur auf dasselbe nehmen dürfen, wenn die Lebensmittel auf 10 Monate zureichen sollen.

$6 : 10 = \frac{10}{6}$ umgekehrt $\frac{6}{10} \times 1000 = \frac{6000}{10} = 600.$

4) 6 Mühlgänge haben die erforderliche Menge Mehl in 24 Stunden gemahlen; wie viele Mühlgänge müßte man gebrauchen; um dieselbe Menge Mehl in 18 Stunden zu erhalten

$$24 : 18 = \frac{3}{4}\ X\ \frac{4}{3} \times 6 = \frac{24}{3} = 8.$$

5) Wenn 60 Männer einen Graben in 30 Tagen zu Stande bringen, wie viele Männer braucht man, wenn er in 4 Tagen fertig werden soll?

$$30 : 4 = \frac{2}{15}\ X\ \frac{15}{2} \times 60 = \frac{200}{2} = 450.$$

6) Wenn 3 Männer 30 Klftr. Holz in 45 Tagen spalten, wie lange würden 15 Männer an 30 Klftr. zu spalten haben?

$3 : 15 = \frac{15}{3} = \frac{5}{1}\ X\ \frac{1}{5} \times 45 = \frac{45}{5} = 9$ Tage.

7)

7) 50 fl. bekam von 36 Wittwen jede auf ihren Antheil von den Renten einer Stiftung; nun ist die Zahl der Wittwen auf 90 gestiegen; wie viel erhält von letztern jede?

$$36 : 90 = \frac{90}{36} = \frac{15}{6} \text{ X } \frac{6}{15} \times 50 = \frac{300}{15} = 20 \text{ fl.}$$

oder noch abgekürzter:

$$36 : \frac{9(0)}{36} = \frac{1}{4} \text{ X } \frac{4}{1} \times 5(0) = 20 \text{ fl.}$$

§. 82.

f) Aufgaben mit verschieden benannten Zahlen.

Ihre Absicht geht dahin, die Schüler zum klaren Bewußtseyn der Nothwendigkeit zu bringen, auch beim Schlußrechnen das Grundgesetz der Rechenkunst „nur Gleiches kann zu einer Zahl verbunden werden" genau zu beobachten. Nach der ersten Schlußart muß das erste und dritte, das zweite und vierte Glied, und nach der zweiten, das erste und zweite Paar gleiche Benennung führen. Z. B.

2 Aepfel : 3 Kreuzer = 10 Aepfel? (15 Kreuzer)

oder:

2 Aepfel : 10 Aepfel = 3 Kreuzer? (15 Kreuzer).

Man setze an die Stelle 10 Aepfel z. B. 10 Eier, und die Schüler werden selbst auffinden, warum auch hier das obige Grundgesetz eingehalten werden muß.

Es kommt aber oft im Leben vor, daß einerlei Dinge nur verschiedene Namen führen z. B. Kreuzer und Gulden sind nur den Namen, und nicht der Sache nach verschie-

schieden, denn 1 Kreuzer kann auch ein Sechzigtel Gulden und ein Gulden 60 Kreuzer genannt werden. So bald daher Sachen einerlei Art z. B. Geld, Gemüße, Gewichte unter einerlei Benennung gebracht worden sind, kann mit ihnen die Berechnung ohne weiteren Anstand angefangen werden. Hier folgen dergleichen Aufgaben, wobei die Schüler zu ermuntern sind, zuerst als Vorrichtung zur Lösung der Aufgaben die erforderliche Gleichheit der Benennungen herzustellen.

1) Wenn man für 48 Kreuzer 4 Ellen Band erhalten hat, wie viele Ellen würde man für 6 fl. (6 × 60 oder 360 Kreuzer) erhalten?

$$48 : 4 \left(= 12 : 1 = \tfrac{1}{12} \times\right) \tfrac{360}{12} \mid 30 \text{ Ellen}$$

Oder wenn man die 48 Kreuzer zu Theilen von Gulden erhebt:

4fünftel Gulden 4 (= 1 : 1) = 6 Gulden = 30fünftel Gulden : 30 Ellen.

2) Wenn man für 2 Gulden 8 Ellen Band bekommt, wie viele Ellen bekommt man für 30 Kreuzer?

12(0 Kreuzer : 8) Ellen = 3(0) Kreuzer?

$$12 : \tfrac{8}{12} = \tfrac{2}{3} \times 3 = \tfrac{6}{3} = 2 \text{ Ellen.}$$

Oder 4 halbe Gulden : 8 Ellen (= 1 : 2 = $\tfrac{2}{1}$ ×) 1 halber Grlden 2 Ellen.

3) Wenn 2 Scheffel Korn 36 Gulden kosten, wie hoch kommt 1 Metze?

2 Scheffel = 12 Metzen : 36 Gulden = (1 : 3 = $\tfrac{3}{1}$ ×) 1 = 8 Gulden

oder 2 Scheffel : 36 fl. = 1 : 18 × $\tfrac{1}{6}$ Scheffel = $\tfrac{18}{6}$ 3 Gulden

oder

oder nach der zweiten Schlußart entweder

12 M. 1 M. $= \frac{36}{12} = 3$ oder 2 Sch. $\frac{1}{6}$ Sch. $(= \frac{1}{2} \times)$ 3 fl.

$= \frac{18}{6} = 3.$

4) Wenn 3 Eimer Bier 9 Gulden kosten, wie hoch kommt 1 Maaß?

(3 Eim. =) 18(0) Maaß : (9 fl. =) 54(0) Kreuzer = 1 Maaß? 18 $\frac{54}{18} = 3$ Kreuzer.

5) 17 Fuder Wein oder (17 × 12 =) 204 Eimer kosteten im Ankaufe 2448 fl.; wie hoch kommt 1 Maaß?

Wenn die Schüler aus der vorigen Aufgabe den Folgesatz abgeleitet haben, daß jede Maaß so viel Kreuzer kostet als 1 Eimer Gulden: so darf in dieser Aufgabe nur noch bestimmt werden, wie hoch 1 Eimer Gulden kostet. Mithin

204 E. 2448 fl. | 12 fl. mithin 1 Maaß 12 Kreuzer.
204
———
408
408
———

Will man aber die Berechnung vollständig haben, so wird auf folgende Weise verfahren:

204 E. 2448 fl. = 1 Maaß?
60 M. 60 Kreuzer
———
1224(0)-14688(0) | 12 Kreuzer
1224
———
2448
2448
———

Anm. Ich kann es nicht unterlassen, hier darauf aufmerksam zu machen, daß die Reesische Rechnungsweise keineswegs kürzer ist, als obige des Denkrechnens; denn hier müßte folgendes Verfahren statt finden.

Kr. ?	1 Maaß
Maaß (60)	1 Eimer
a) Eimer (2)	1 Ohm
6) Ohm (6)	1 Fuder
Fuder 17	(2448) Gulden (6
Gulden 1	(60) Kreuzer
	(408) (2
	204

17 | 204 | 12
17
———
34
34
———

Dabei ist sie in ihrem Verfahren so mechanisch und unbildend, daß sie billig aus unsern Bildungsanstalten verwiesen und ihr Gebrauch bloß für kaufmännische Geschäftszimmer beschränkt werden muß, wo mechanische Abkürzungsmittel zur Ersparung der Zeit und Kopfarbeit zweckmäßig und daher auch sehr willkommen sind.

§. 83.
Fortsetzung.

5te Aufgabe: wenn 4 Bögen Schreibpapier um 3 Kreuzer verkauft werden, wie viel kann man aus 8 Ballen lösen? Ein Ballen besteht aus 10 Ries, 1 Ries aus 20 Büchern, 1 Buch aus 24 Bögen. 8 Ballen sind folglich 80 Ries; 80 (× 20 =) 1600 Bücher oder

1600
24
———
6400
32
———
38400 Bögen

der

der Ansatz ist daher folgender:

$$4 : 38400 \left(= \frac{2600}{1} \times\right) 3 = \overset{60}{|\,2880(0}\ \text{Kr.}\ |\ 480\ \text{fl.}$$

$$\begin{array}{r} 24\ : \\ \hline 48\,. \\ 48\,. \\ \hline 0 \end{array}$$

Auch hier kann man von Abkürzungsmitteln Gebrauch machen. Denn da 3 Bögen zu 24 Bögen sich verhalten wie 1 : 6; und 20 Büchern, woraus ein Ries besteht, zu 60 Kr., die 1 Gulden ausmachen wie 1 : 3; diese 3 sich aber durch die 3 Kreuzer heben; so kann die Vorrechnung auch also lauten:

8 Ballen = 80 Ries multiplizirt mit

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 480 \end{array}$$ Gulden

oder weitläufiger angesetzt, damit die Lehrer sich um so leichter in diese abkürzende Verfassungsart finden, und sie ihren Schülern gründlich nachweisen könne.

$\overset{4}{(4)}$ Bogen : $\overset{3}{(3)}$ Kr. = 80 Ries × $\overset{20}{(20)}$ Buch × $\overset{4}{\underset{6}{(24)}}$ Bögen?

Gulden oder 1 × $\overset{20}{\underset{(3)}{\overset{3}{}(60)}}$ Kreuzer.

Durch 4 wird das erste Glied ganz aufgehoben, und die 3 Zahl im 3ten Gliede (24) auf 6 herabgesetzt; durch 20 die zweite Zahl im dritten Gliede (20) ganz aufgehoben, und der Gulden auf das 20tel oder auf 3 herabgesetzt; durch 3 das zweite und vierte Glied gänzlich aufgehoben; es bleibt mithin nur 80 × 6 = 489 fl. Oder auf eine andere Weise:

$\overset{4}{(4)} : 3 = (\overset{4}{8}0) \times (\overset{20}{2}0) \times 24?$ Gulden $= 1 \times (\overset{20}{6}0)$ Kreuzer.

$20 \times 24 = 480$ — $\overset{3}{(3)}$

6te Aufgabe: Wenn in jeder Minute ein Mensch gebohren wird, wie viele werden in hundert Jahren gebohren? 100 Jahre $= 100 \times 365$ Tage $\times 24$ Stunden $\times 60$ Minuten oder

36500	Tage
24	Stunden
146000	
730	
876000	
60	Minuten
52,560,000	Menschen.

7te Aufgabe: Wenn 90 ℔ 12 fl. kosten, wie hoch kommt 1 Loth? 90 ℔ ist $= 90 \times 32$ Loth $= 2880$ Loth; und 12 fl. $= 12 \times 60 = 720$; $2880 : 720 = \frac{\overset{72}{72(0)}}{288(0)} \mid \frac{1}{4}$ Kreuzer oder noch kürzer:

9(0) ℔ : (12 fl. =) 72(0) Kr. $(= \frac{72}{9} =)$ $\frac{8}{1}$ ℔ $= \frac{8}{32}$ Loth $= \frac{1}{4}$ Loth.

8te Aufgabe: Wenn 5 ℔ + 3 Loth + 3 Quint 32 fl. + 45 kr. kosten; wie hoch kömmt 1 Quint? — 5 ℔ $= 5 \times 32$ Loth $= 160 + 3 = 163$ Loth; 163×4 Quint $= 652 + 3 = 655$ Quint; 32 fl. $= 32 \times 60 = 1920 + 45$ kr. $= 1965$ Kr.

655 Quint : $1965 = \frac{\overset{5}{1965}}{655} \mid \frac{393}{131} = 3$ Kr.

9te Aufgabe: Wenn das Scheffel Weitzen 11 fl. kostet, wiegt eine Kreuzersemmel 9 Loth und 1 Quint; wie schwer muß sie seyn, wenn der Scheffel auf 33 fl. 55 kr. gestie-

gestiegen ist? Da hier der Fall der dritten oder verkehrten Rechenschlußweise eintritt, indem die Semmel immer geringer werden muß, je höher der Preis des Weitzens steigt, so findet hier folgende Berechnung statt:

(11 fl. =) 660 Kr. : (33 fl. 55 kr. =) 2035 Kr. = $\frac{2035}{660}$

X (d. h. verkehrt =) 660 × 37

```
                 660
2035 | 24,420 | 12 Quint.
       20 35
       -----
        4070
        4070
```

Oder den Ansatz der Preise sogleich umgekehrt, und dabei die Zahlen abgekürzt:

```
  5                          5
(2035) Kr. : 37 Quent = (660) Kr.
 407          37     ×    132
             ---           37
             407          ---
                          924
                         396
                  407 | 4884 | 12 Quint.
```

3. Mit Theilzahlen.

§. 84.

a) In einem Gliede.

1te Aufgabe: Wenn $\frac{7}{8}$ ℔ kostet 18 Groschen, davon 24 Gr. 1 sächsischen Thaler ausmachen; was kosten 49 ℔? 49 ℔ sind 392 Achtelpfunde. Nach dieser hergestellten gleichen Benennung wird die vierte Zahl auf folgende Weise gefunden:

7 Achtelpfund : 18 gl. = 392 Achtelpfund?

$\frac{18}{7} \times 392 = \frac{7056}{7} | 1008 \text{ gl.} | 42 \text{ Thlr.}$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline \end{array}$$

Oder noch kürzer, da 7 und 392 gleich vermindert werden können:

$\overset{7}{(7)} : 18 = \overset{7}{(392)}$

$18 \times 56 = 1008$ gl. = 42 Thaler.

2te Aufgabe: 6 ℔ kosten $\frac{7}{8}$ Thaler = 38 ℔? Nach §. 70 ist $6 : \frac{7}{8} = \frac{7}{48}$; mithin die Berechnung folgende:

$6 : \frac{7}{8} (= \frac{7}{48} \times) \; 38 = \frac{266}{48} \;|\; 5 \frac{26}{48} (= \frac{13}{24})$ Thaler.

Oder da man das gleiche Erzeugniß gewinnt, wovon der Grund bereits klar geworden ist, ob man mit der Division oder mit der Multiplikazion anfängt, so kann die Berechnung auch noch auf folgende Weise vereinfacht werden:

6 ℔ : $\frac{7}{8}$ Thlr. = 38 ℔

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline \end{array}$$

$6 : \frac{266}{8} = \frac{266}{48} = 5 \frac{13}{24}$ Thaler.

3te Aufgabe: $\frac{1}{4}$ Elle kostet 1 fl. 12 kr. = 11 Ellen

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 72 \text{ Kreuzer} \\ 44 \text{ V. E.} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 44 \text{ Viert. Ellen} \end{array}$$

$60 \;|\; 3168$ Kreuzer | 52 Gulden 48 Kr.

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 16 \\ 12 \\ \hline 48 \end{array}$$

4te

4te Aufgabe: Wenn 4 ℔ ½ fl. kosten, wie hoch kommt 2 ℔: Die Auflösung kann geschehen entweder auf folgende Weise:

4 ℔ ½ fl. 30 Kr. | 7 ($\frac{2}{4}$) ½ Kreuzer;

oder 4 : ½ (=⅛) fl. = 8 : 60 Kr. = 7½ Kr.

5te Aufgabe: Wenn 21 Stücke um 152 fl. 36 kr. verkauft werden, wie hoch kommt ¼ Stück? Hier sind wieder die verschiedenen Glieder zuerst gleichnamig zu machen, und dann nach der Schlußregel fortzufahren, um das zu suchende vierte Glied zu finden.

```
21 St. : 152 fl. 36 kr. = ¼ = 1 Viertelstück
 4         60
84 V.St. 9120
           36
         9156 | 109 Kr. = 1 fl. 49 kr.
         84
          756
          756
```

6te Aufgabe: 9 Ellen Tuch kosten 68 fl. 24 kr.; nun braucht der Schneider, um die nöthigen Kleidungsstücke daraus verfertigen zu können, noch ⅓ Elle; was ist dafür zu zahlen?

```
9 E. 68 fl. 24 kr. = ⅓ = 1 Drittel
3        60
27 Dr. |4104 Kr. | 152 Kr. = 2 fl. 32 kr.
        27
        140
        135
          54
          54
```

7te

7te Aufgabe: Was kostet 1 Elle, wenn 5 Ellen auf $\frac{1}{3}$ fl. kommen. Auflösung der Theilzahl $\frac{1}{3}$ fl. = 20 kr.

1 : 5 = 20 | 4 Kreuzer

oder ohne solche:

1 : 5 × $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{15}$ fl. = (15 : 60) 4 kr. oder 5 : $\frac{1}{3}$ (= $\frac{1}{15}$ ×) 1?

15 : 60 = 4.

8te Aufgabe: Wie viele Ellen $\frac{3}{4}$ breiten Zeuges muß man zum Unterfutter eines Kleides haben, zu welchem 5 Ellen 2 Ellen oder 8 Viertel breiten Tuches erforderlich sind? Der Ansatz ist folgender:

8 Viertel : $\frac{3}{8}$ Viertel X (umgekehrt) $\frac{8}{3}$ × 5 = $\frac{40}{3}$ = 13$\frac{1}{3}$.

§. 85.

b) In mehreren Gliedern.

Erste Aufgabe: Wenn 4 ℔ 1$\frac{1}{3}$ Gulden kosten, wie hoch kommen 6$\frac{1}{4}$ ℔? Hier werden nach der Grundregel zuerst wieder die Glieder unter einerlei Benennungen gebracht:

(4 ℔ =) 16 Vierling : (1$\frac{1}{3}$ fl.) = $\frac{80}{16}$ × (6$\frac{1}{4}$ =) 25 V.

80

16 | 2000 | 125 kr. =

2 fl. 5 kr.

Oder wenn die Abkürzungsweise dabei angebracht wird:

$\overset{16}{(16)}$ V. : $\overset{16}{(80)}$ Kr. = 25 V.

5 × 25 = 125 Kr. = 2 fl. 5 kr.

Anm. Den Lehrern kann es an mehreren Aufgaben dieser Art nicht fehlen, indem sie nur die Theilzahlen verändern, oder die Aufgabe umändern dürfen, wodurch

durch zugleich die Richtigkeit der erstern geprüft wird. Z. B. wenn $6\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{2}$ fl. kosten; was kosten 4 ℔?

Zweite Aufgabe: $\frac{7}{8}$ ℔ : $\frac{5}{6}$ Thl. = 36 ℔? 36 ℔ sind 288 Achtelpfund; mithin ist die Berechnung folgende:

7 Achtelpfund : $\frac{5}{6}$ (= $\frac{5}{42}$ ×) 288 Achtelpfund

```
                    5
              42 | 1440 | 34 rl.
                   126
                   180
                   168
                   12/42 = 2/7 rl.
```

Dritte Aufgabe: $\frac{1}{6}$ Elle : $\frac{1}{4}$ fl. = 16 E.

```
                          6
        1 Sechstel 15 kr. : 96 Sechstel,
                          15
                          480
                          96
                   6(0 | 144(0 | 24 fl.
                          12
                          24
```

Oder kürzer: 1 : $(\overset{3}{15}) = (\overset{3}{96})$.

```
              5  ×  32
                    5
              4 | 160 | 24 fl.
```

Oder noch kürzer: 1 : $\frac{1}{4}$ fl. 96 | 24 fl.

Vierte Aufgabe: $\frac{5}{6}$ Zentner : 24 Thl. = $\frac{7}{8}$ Zentner? Da $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{40}{48}$ $\frac{42}{48}$ so ist der Ansatz nach der ersten Schlußart:

(40)

$(\overset{2}{40})$ Acht u. vierzigtel Ztr. : $(\overset{2}{24})$ Thl. = 42 Acht u. vierzigtel Ztr.?

$20 \qquad \frac{12}{20} \times 42$

$$
\begin{array}{r}
42 \\
12 \\
\hline
84 \\
42 \\
\hline
20 \mid 504 \mid 25\tfrac{1}{5}\ \text{Thlr.} \\
40 \\
\hline
104 \\
100 \\
\hline
\frac{4}{20} = \frac{1}{5}
\end{array}
$$

Oder nach der zweiten:

$(\overset{2}{40}) : (\overset{2}{42}) = 24$

$20 \qquad \frac{21}{20} \times 24$

$$
\begin{array}{r}
24 \\
21 \\
\hline
24 \\
48 \\
\hline
20 \mid 504 \mid 25\tfrac{1}{5}\ \text{Thlr.}
\end{array}
$$

Fünfte Aufgabe: Wenn $8\frac{1}{3}$ Ellen $21\frac{1}{2}$ fl. kosten, wie hoch kommen $12\frac{3}{4}$ Ellen? Hier sind nicht nur die Glieder zuerst einzeln auf eine ganze Zahl, sondern auch das erste Glied (= 25 Drittel) und das Drittel (= 51 Viertel) unter einerlei Benennung zu bringen, indem jedes Glied durch das Theilganze des andern multiplizirt wird. Der Ansatz ist folgender:

$8\frac{1}{3}$ Ellen : $21\frac{1}{2}$ fl. = $12\frac{3}{4}$ Ellen

25 Drittel E. 43 halbe fl. 51 Viertel E.

$$
\begin{array}{ccccc}
4 & & & & 3 \\
\hline
100 & : & \frac{43}{100} & \times & 153
\end{array}
$$

153
43
―――
459
612
―――
100 | 6579 | 65 halbe Gulden = 32 fl. 30 kr.
6500
―――
79
30 kr.
―――
100 | 2370 | 23 kr.
2300
―――
$\frac{7(0}{10(0} = \frac{7}{10}$.

32 fl. 30 kr.
23 $\frac{7}{10}$ kr.
―――
32 fl. 53 $\frac{7}{10}$ kr.

4. Schlußweise bei mehreren Zahlgliedern als dreien.

§. 86.

a) Wenn die Aufgabe aus 4 Gliedern besteht.

In diesem Falle werden nur die zwei Zahlen angesetzt, welche unter sich, und die dritte, welche mit der gesuchten Zahl gleichartig sind. Z. B.

1) Ein Fuhrmann fährt 15 Zentner Fracht für 35 fl. 24 Meilen weit; wie weit wird er für dieselbe Summe 20 Zentner fahren? 25 und 20 Zentner sind das erste gleichartige Zahlenpaar; 24 Meilen und die noch unbekannte Meilenzahl das andere; die Zahl 35 fl. bleibt bei der Berechnung weg, weil dieß die Summe ist, welche

für

für beide Fälle immer der Fuhrmann erhält. Der Ansatz ist daher folgender:

20 Ztr. 15 Ztr. $(= \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \times)$ 24 Meil. $= \frac{72}{4} = 18$ Meilen.

Oder wenn 15 zuerst gesetzt wird, da es eine verkehrte Schlußweise ist (je mehr Fracht, je weniger weite Fuhr um denselben Preis):

15 : 20 $(= \frac{20}{15} \times \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \times)$ 24 Meil. $= \frac{72}{4} = 18$ Meilen.

Oder nach der ersten und dritten Schlußweise:

20 Ztr. 24 Meil. = 15

$20 : 24 = \frac{24}{20} \times 15$

24
60
30

2(0 | 36(0 | 18 Meilen.

Oder mit Rücksicht auf die hierbei anwendbaren Abkürzungsmittel:

$\underset{5}{(\overset{4}{20})} : (\overset{4}{24}) = 15$, $\frac{5}{6} \times 15 = \frac{90}{5} = 18$ oder $\underset{4}{(\overset{5}{20})} : \underset{4}{\underline{24}} = (\overset{3}{15})$, $3 \times 24 = \frac{72}{4} = 18$

Oder zwei Mahl abgekürzt:

$(\overset{5}{20}) : (\overset{4}{24}) = (\overset{5}{15})$

$\underset{1}{(\overset{4}{4})}$ 6 × 3 = 18 Meilen.

2) Wenn 10 Personen in 3 Wochen $1\frac{3}{4}$ Ztr. Brod essen, wie lange werden 7 Personen damit auskommen? Welches sind die 2 gleichartigen Zahlenpaare? Welche Zahl ($1\frac{3}{4}$ Ztr. Brod) bleibt als unveränderlich ausser Ansatz? Wie ist folglich die Berechnung zu entwerfen?

$10 : 7 = \frac{7}{10} \times \frac{10}{7} \times 3$ Wochen $= \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ W.

Warum mußte hier die verkehrte Schlußart angewendet werden? Dauert wirklich dieselbe Brodmasse eine

desto

desto **längere** (und nicht desto geringere) Zeit, je **geringer** die Anzahl der Personen ist? Wie kann daher diese Berechnung noch auf verschiedene Weise vollzogen werden?

a) Wenn umgekehrt 7 Personen statt 10 Personen als erstes Glied angesetzt werden:

$$7 : 10 = \frac{10}{7} \times 3 = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}.$$

b) Wenn 10 den dritten Platz erhält:

$$7 : \frac{3}{7} = 10 \times 3 = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}.$$

c) Oder wenn mit der Multiplikazion des ersten Zahlenpaares nach erster Schlußstellung angefangen wird: $10 \times 3 = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$.

3) Wenn in 7 Tagen eine Mühle auf 1 Gange 12 Scheffel mahlt, wie viel wird sie in derselben Zeit auf ihren 18 Gängen mahlen?

$$1 : 18 \times 12 = 216 \text{ oder } 1 : 12 \times 18 = 216.$$

§. 87.

b) Wenn sie aus noch mehreren Gliedern besteht.

Da solche Aufgaben aus mehreren Schlußsätzen bestehen, so kann man sie entweder in ihre Bestandtheile zerlegen, und die Schlüsse einzeln, einen nach dem andern, anfertigen; oder man macht einen sogenannten Kettenschluß daraus. Ein Kettenschluß heißt aber eben ein solcher mehrgliederiger Schlußsatz, wovon die Glieder eben so, wie bei einer Kette, ein ineinander zusammenhängendes Ganze bilden. Z. B. Alle Menschen sind sterblich; alle Russen sind Menschen; Alexander ist ein

ein Russe; folglich ist Alexander sterblich. Eigentlich bildet er zwei miteinander verbundene Schlüsse: 1) Alle Menschen sind sterblich, die Russen sind Menschen, folglich sind die Russen auch sterblich. 2) Alle Russen sind sterblich; Alexander ist ein Russe; folglich ist auch Alexander sterblich.

1) Durch Zerlegung: Ein Fabrikant braucht für 50 Arbeiter wöchentlich 10 fl., wenn der Scheffel Korn 8 fl. kostet; er hat noch 25 Arbeiter weiter angenommen, und das Korn ist auf 12 fl. gestiegen; wie viel braucht er nun wöchentlich für Brod auszugeben?

Zerlegen läßt sich diese Aufgabe in zwei Fragen. Die erste lautet: wie viel verbraucht dieser Fabrikant bei halber Verdoppelung seiner Arbeiter bei dem ersten Getraidepreise? Die zweite: wie viel braucht er, wenn nun auch noch mit dem Getraidepreise eine Erhöhung vorgeht?

Lösung der ersten Frage:

$$\overset{25}{(50)} : \overset{25}{(75)} = 10\,?$$
$$2 : 3 \left(= \tfrac{3}{2} \times\right) 10 = \tfrac{30}{2} = 15 \text{ Gulden.}$$

Lösung der zweiten Frage: wenn er bei 8 fl. Kornpreis für 15 fl. Brod braucht, wie viel braucht er bei 12 fl. Kornpreis?

$$8 : 15 \left(1\tfrac{7}{8} \times\right) 12 = \tfrac{84}{8} = 10\tfrac{1}{2}$$
$$1 \times 12 = 12$$
$$22\tfrac{1}{2} \text{ Gulden.}$$

Oder mit Anwendung der Abkürzungsweise:

$$\overset{4}{(8)} : 15 = \overset{4}{(12)}$$
$$2 : \tfrac{15}{2} \times 3 = \tfrac{45}{2} = 22\tfrac{1}{2}.$$

2) Ohne Zerlegung. Der hierbei zu machende Schluß lautet: wie sich das Erzeugniß der beiden ersten

Zah-

Zahlen (50 Arbeiter und der Kornpreis von 8 fl.) zu der wöchentlichen Ausgabe von 10 fl. verhält, so verhält sich auch das Erzeugniß der beiden letzten Zahlen (75 Arbeiter und 12 fl. Kornpreis) nothwendiger Weise zu der noch unbekannten Zahl. 50 × 8 = 400; und 75 × 12 = 900. Der Ansatz ist folglich:

400 : 10 = 900 ?

40 : 1 = $\frac{90}{4}$ = $\frac{22}{4}$ = $22\frac{1}{2}$ fl.

Auch kann man diese Verhältnißbestimmung bei dieser Berechnung einzeln vornehmen; zuerst folglich darthun, wie sich 50 Arbeiter zu der wöchentlichen Ausgabe von 10 fl. betragen; solches auf das Verhältniß der 75 Arbeiter zu der dadurch aufzufindenden vierten Zahl übertragen; und dann noch das Verhältniß der beiden verschiedenen Kornpreise hinzufügen, und hierdurch die aufgefundene 4te Zahl weiter zu bestimmen. Der Ansatz ist dann folgender:

50 : (8 :) 10 = 75 : (12 :) ?

5 : $\frac{1}{5}$ = $\frac{75}{5}$ = 15

$\frac{12}{8}$ = $\frac{3}{2}$ × 15 = $\frac{45}{2}$ = $22\frac{1}{2}$ fl.

Die zweite und 5te Zahl (8 und 12) werden eingeschlossen, bis die erste Verhältnißberechnung abgethan ist; dann wird noch mit der Verhältnißzahl dieser (= $\frac{12}{8}$) 15 multiplizirt und dividirt.

§. 88.

c) Mehrere Aufgaben zur Uebung.

1) Wenn man mit 4 Pflügen in 3 Tagen 25 Morgen Landes bestellen kann, wie viel Ackerland wird man

mit

mit 3 Pflügen in 8 Tagen bestellen können? — $4 \times 3 = 12$; und $3 \times 8 = 24$. Folglich ist der Ansatz:

$$12 : \tfrac{25}{12} (\times) 24$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \hline 120 \\ 48 \\ \hline 12 \mid 600 \mid 50 \text{ Tage.} \end{array}$$

Oder mit vollem Ansatze, und fortschreitender Verhältnißbestimmung:

$$4 : (6 :) 25 = 3 : (8 :) ?$$

$$4 \quad : \quad \tfrac{25}{4} \times 3 = \tfrac{75}{4} = 18\tfrac{3}{4} \times \tfrac{8}{3} ?$$

$$18 \times 8 = 144; \; 8 \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{24}{4} = 6$$

$$144 + 6 = \tfrac{150}{3} = 50 \text{ Tage.}$$

Hier wird zuerst die Theilzahl 8 mit 18, und dann mit $\frac{3}{4}$ multiplizirt; das Erzeugniß von beiden (150) durch das Theilganze (3) dividirt, und die gesuchte Zahl ist gefunden. — Zugleich bemerke ich h er, daß letztere Berechnungsweise im Grunde die Zerlegungsweise, nur in kürzerer Form, ist. Vollständig würde sie auf folgende Weise gemacht werden: wie sich 3 Tage zu 8 Tage verhalten, so auch die durch den ersten Schluß herausgekommene Summe zu der gesuchten noch unbekannten, mithin 3 Tage : $\frac{8}{3}$ Tage $= 18\frac{3}{4}$?
folglich $8 \times 18\frac{3}{4} = \frac{150}{3} = 50$ Tage wie oben.

2) 12 Arbeiter brauchen 5 Wochen zu einem Graben von 60 Schuhen? (wie viele Arbeiter brauchen 3 Wochen zu einem Graben von 50 Schuhen. Da hier das verkehrte Verhältniß ist: je mehr Arbeiter, je weniger (nicht je mehr) Zeit, so dürfen bloß die 60 und

50

50 Schuh umgekehrt zu den 3 und 5 Wochen in Verhältniß gebracht werden, um die gesuchte Zahl zu finden.

(60)Sch. × 3W. =) 18(0 : 12 = (50 × 5 =) 25(0 : ?

18 : $\frac{12}{8} = \frac{2}{3}$ × 25 = $\frac{50}{3}$ = $16\frac{2}{3}$

Daß die Schüler auch nach der zweiten Schlußform den Ansatz auf folgende Weise machen können, wird kaum hier noch ein Mahl erinnert werden dürfen, kann aber als weitere Rechnungsübung benutzt werden.

(18(0) : 25(0 = (12) [über 18 und 12 jeweils: 6]

3 : $\frac{25}{3}$ × 2 = $\frac{50}{3}$ = $16\frac{2}{3}$ wie oben.

Will man auch diesen Kettenschluß in 2 Schlüsse zerlegen, so werden die beiden Mittelglieder so lange eingeschlossen, bis der erste Rechenschluß abgethan ist, und dann die Schlußfolge daraus mit dem zweiten Rechenschlusse in Verbindung gebracht, wie folget.

60 :(5:) 12 ($\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ ×) 50 (: 3) = $\frac{50}{5}$ = 10

$\frac{3}{5}$ X $\frac{5}{3}$ × 10 = $\frac{50}{3}$ = $16\frac{2}{3}$ wie oben.

3) Wie viel Zins tragen 1600 fl. Kapital in 6 Jahren; wenn 100 fl. in 1 Jahre 4 fl. Zins abwerfen?

(100 × 1 =) 1(00 : 4 = (1600 × 6 =) 96(00 ?

1 : 4 = $\frac{4}{1}$ × 96

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 384 \end{array}$$ Gulden.

Oder wenn man 100 fl. und 1600 vor dem Ansatze auf 1 und 16 zurückbringt:

1 : 4 = (16 × 6 =) 96

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 384 \end{array}$$ Gulden.

4) Wenn 1600 fl. tragen in 6 Jahren 384 fl. wie viel tragen alsdann 100 fl. in einem Jahre Zinsen?

Nach geschehener Abkürzung (1600 : 100 = 16 : 1) ist der Ansatz entweder folgender:

$$16 \times 6 = 96 : 384 = 1?$$

$$96 : 384 = \frac{384}{96} \mid 4 \text{ Gulden.}$$

Oder wenn man den Kettenschluß auflöset:

$$16 : (6 :) \frac{384}{16} = 24; \; 24 \times \frac{1}{6} \text{ (1 Jahr : 6 Jahre)} = \frac{24}{6} = 4 \text{ wie oben.}$$

5) Wenn man 4 fl. Zins in 1 Jahre von 100 fl. erhält, so muß von 384 fl. 6jährigem Zinse das Kapital betragen?

Hierbei kann man entweder die 384 fl. Zinsen zuerst in 6 Jahre vertheilen, wodurch man den 1jährigen Zins 64 fl. erhält, und dann auf folgende Weise verfährt:

$$\overset{4}{(4)} : \overset{4}{(100)} = 64$$
$$1 : 25 \times 25$$

```
320
128
————
1600 fl.
```

oder zuletzt das von 304 fl. jährlichen Zinse gefundene Kapital durch 6 dividiren:

$$\overset{4}{(4)} : \overset{4}{(100)} = 384$$
$$1 \quad 25 \quad 25$$

```
    1920
    768
    ————
6 | 9600 | 1600 fl.
```

6) Wenn 9 Taglöhner in 16 Tagen 27 Klaftern Holz machen können, wie viel werden 8 Taglöhner in 12 Tagen Klaftern Holz verfertigen? Zuerst wird $9 \times 16 = 144$; und $8 \times 12 = 96$; dann ist die Berechnungsweise folgende:

$$144 : \tfrac{27}{144} = 96?$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \hline |\,2592\,| \end{array} \text{ 18 Klaftern.}$$

Oder noch kürzer, wenn man alle Abkürzungsmittel dabei gebrauchen will:

$$\overset{4}{(144)} : 27 = \overset{4}{(96)}$$

durch 6) (36) . (24)

2) (6) (4) .

$$3 : \tfrac{27}{1} = \tfrac{9}{1} \times 2 = 18 \text{ Klaftern.}$$

Oder mit Zerlegung der beiden zusammengeketteten Schlüsse:

$$9 : (16 :)\ 27 = 8 : (12 :)?$$

$$9 : 27 = \tfrac{3}{1} \times 8 = 24$$

$$16 \text{ Tage} : 12 \text{ Tage} = \tfrac{12}{16} = \tfrac{3}{4} \times 24 = \tfrac{72}{4} = 18 \text{ Klftr.}$$

Anm. Hierbei unterlasse man nicht, seine Schüler aufs neue aufmerksam zu machen, warum in dem Schlußkettenansatze die beiden ersten Zahlen der ersten und zweiten Schlußhälfte miteinander multiplizirt werden müssen. Auch bei nur wenig geübter Rechendenkkraft müssen sie leicht auffassen, daß 16 Mahl 9 Taglöhner in einem Tage so viel arbeiten können, als 9 Taglöhner in 16 Tagen.

7) Wenn eine gewisse Gartenmauer von 2 Arbeitern in 24 Tagen aufgeführt werden kann, wie viele Arbeiter wird man anstellen müssen, um sie in 3 Tagen zu Stande zu bringen? Hier ist wieder die Schlußweise: je weniger Tage desto mehr Arbeiter. Statt den Ansatz zu machen: 2 : 24 = 3? werden bloß die Zahlen 2 und 3 auf folgende Weise versetzt:

$3 : \frac{24}{3} \times 2 = \frac{48}{3} = 16$ Arbeiter.

Oder mit Verkürzung:

$$\overset{3}{(3)} : \overset{3}{(24)}$$
$$1 \qquad 8 \times 2 = 16 \text{ Arbeiter.}$$

Will man aber die zweite Schlußweise anwenden, nach welcher die beiden Tagszahlen zusammengesetzt werden, so ist die Berechnung folgende:

$24 : \frac{3}{24}$ X (d. h. umgekehrt) $= \frac{24}{3} \times 2 = \frac{48}{3} = 16$ Arbeiter.

Oder mit Anwendung der Verkürzungsweise:

$24 : 3 \; (= 8 : 1 \; X \; 1 : 8 \times) : 2 = 16$ Arb.

8) Vier Schuhmachergesellen verfertigen in 6 Tagen 12 Paar Schuhe; wie viele Paar Schuhe können 16 Gesellen in 9 Tagen verfertigen?

(4 Gesellen $\times$ 6 Tagen $=$) $24 : 12 = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$;
(16 Gesellen $\times$ 9 Tage $=$) $144 \times \frac{1}{2} = \frac{144}{2} = 72$ Paar.

Oder mit Anwendung der Verkürzungsweise, nach welcher in beiden Sätzen gleiche Zahlenverminderungen vorgenommen werden können:

$$\overset{4}{(4)} : \overset{3}{(6)} \; 12 = \overset{4}{(16)} : \overset{3}{(9)}?$$
$$1 : 2 : \frac{12}{2} = 6 \quad 4 \times 3 = 12$$
$$6$$
$$\overline{72} \text{ Paar.}$$

9) Wenn der Scheffel Korn 9 fl. gilt, soll ein Laib Brod, welcher $7\frac{1}{2}$ Kreuzer gilt $3\frac{3}{4}$ ℔ wiegen; wie schwer muß ein Laib für 12 Kreuzer seyn, wenn der Scheffel 11 fl. 24 kr. kostet?

a) Ohne Zerlegung wird die Aufgabe auf folgende Weise gelößt, nachdem die 11 fl. 24 kr. in 684 kr.; die 9 fl. in 540 kr.; die $7\frac{1}{2}$ und 12 kr. in 30 und 48 Pfennige,

nige, und die $3\frac{3}{4}$ ℔ in 15 Vierlinge verwandelt worden sind, um Einheit der Benennung zu erlangen. Uebrigens müssen die 684 kr. statt der 540 kr. vorangesetzt werden, weil hier ein verkehrtes Verhältniß statt findet:

(684) Kr. × (30) Pf. : 15 Vlg. = (540) Kr. × (48) Pf. ?

114 × 5 $\frac{15}{570}$ × 90 × 8

$114 \times 5 = 570$; $90 \times 8 = 720$; $720 \times 15 = 3600 + 720 = 10800$

57(0 | 1080(0 | 18 Vlg. = 4 ℔ 16 Loth.

57, 510, 456, 54

54 Vierling × 8 Loth = 432; 57 | 432 | 7 Loth; 399; 33

33 × 4 Quint = 132 | 2 Quint; 114; 18 (3); $\frac{18}{57}$ | $\frac{6}{19}$

℔	Loth	Quint
4	16	—
—	7	—
—	—	2
—	—	$\frac{6}{19}$
S. 4	23	$2\frac{6}{19}$

b) Durch Zerlegung in 2 Schlüsse:

1) Für (30) Pf. bekommt man 15 Vlg. = wie viel für (48) Pf.?

5 5 8

$8 \times 15 = 120$ = 24 V. = 6 ℔

2) Für (684) kr. = (6) ℔ Brod = 540 kr.

114 : 1 ℔ Loth Q.

114 : 540 | 4 ℔ 4 — —
456
84
32 Loth
2688 | 23 Loth — 23 —
228
408
342
66
4 Quint
264 | 2 — — — 2
228
36
114 | $\frac{6}{19}$ — — $\frac{6}{19}$

S. 4 23 $2\frac{6}{19}$

§. 87.

d) Noch weitere Ansatzweisen für das Schlußrechnen.

Sobald die Schüler begriffen haben, daß bei diesen Kettenschlüssen immer von dem Verhältnisse eines Zahlenpaares zu dem andern fortgeschlossen wird, so kann man ihnen auch noch sagen, daß es ganz einerlei ist, sie paarweise nebeneinander auf einer Linie oder untereinander zu setzen.

Nach der ersten Weise, wobei man die in Verhältniß stehenden Paare wie Theilzahlen ansetzt. Z. B. die letztere Aufgabe:

$\frac{10}{48}$

$\frac{30}{48}$ Pfennige × $\frac{684}{540}$ Kr. × $\frac{x}{15}$ (die noch unbekannte Zahl) Vierlinge Brod. verringert =
$\frac{5}{8}$ — × $\frac{114}{30}$ „ × $\frac{x}{3}$ und noch weiter verringert =
$\frac{1}{8}$ — × $\frac{38}{30}$ „ × $\frac{x}{3}$ 3 × 30 = 90 × 8 = $\frac{720}{38}$ wie oben.

Nach der zweiten Weise: wie sich
30 Pfenninge zu 48 Pfenninge
684 Kreuzer — 540 Kreuzer verhalten, so
x (die unbek. Zahl zu 15 Vierlingen

wendet man auch hier die Verkürzungsweise an, so erhält diese Berechnung folgende Gestalt:

6) (30) : (48) (6
6) (684) : (540) (6
x : (15) (5
3) (5) 8
3) (114) (90) (3
38 3
30

30 × 3 = 90 × 8 = $\frac{720}{38}$ = 4 ℔ 23 Loth $2\frac{6}{19}$ Quint, wie die weitere Berechnung ausweisen wird

Noch ein Beispiel zu dieser Berechnungsweise sey die Aufgabe: ein Kaufmann wünscht zu wissen, wie hoch er in Wien 1 Wiener Elle Tuch in Wiener Gulden verkaufen müsse, ohne seine Waare weder höher noch niedriger hinzugeben, nachdem er in Nürnberg 1 Nürnberger Elle um 5 Nürnberger (oder rheinische) Gulden verkauft hat.

Nach erster Weise:

$\frac{1 \text{ Nürnberger}}{1 \text{ Wiener}} \times \frac{17 \text{ Wiener}}{20 \text{ Nrbgr.}}$ } Ellen × $\frac{6 \text{ Nürnbg.}}{5 \text{ Wiener}} \times \frac{\text{X Wiener}}{5 \text{ Nrbgr.}}$ } Gulden

$$20 \times 5 = 100 \times 5 = \frac{500}{102}$$
$$17 \times 6 =$$

Nach der zweiten:

Wenn 1 Nrbgr. Elle 5 Nrbgr. fl. kostet;
17 Wiener — 20 — Ellen gleich sind;
6 Nrbgr. fl. 5 Wiener fl. —
X (was kostet in Wiener Geld) 1 — Elle?

17 × = 102 5 × 20 = 100 × 5 = 500.

102

```
102 : 500 | 4 fl.
      408
      ---
       92
       60 kr.
      ----
     5520 | 54 kr.
     510
     ---
      420
      408
      ---
       12
        4 Pf.
      ---
       48 ⌣6
      --- |  = 8/17 Pf.
      102 |
```

Oder da durch 2 sowohl 6 auf 3, als auch 20 auf 10 verringert werden kann:

```
51 : 250 | 4 fl.
     204
     ---
      46 u. s. w.
```

§. 90.

e) Schlußbemerkung.

Sind die Schüler der Mittelklasse in Volksschulen gründlich nach Vorschrift des Denkrechnens bis hierher geführt und mit ihnen (nach der Regel ihres zweijährigen Verbleibens in jeder Klasse) dieser Lehrgang noch ein Mahl wiederhohlt worden: so halte man sie für befähigt, in den noch übrigen dritten Lehrkursus der Rechenkunst überzutreten, wo sie ihre gewonnene Rechendenkkraft auf die im gewöhnlichen bürgerlichen Leben vorkommenden Rechenaufgaben noch vollends anzuwenden haben.

Man hüte sich, seine Schüler zum Nachtheile der übrigen noch so mannichfaltigen Grundbildung des Menschen den Unterricht in der Mittelklasse schon auf mehrere und höhere Zahlgegenstände ausdehnen zu wollen.

Wer nach seinem besondern Berufe künftig sich mit dem noch höhern Gebiete der Zahlenkunde bekannt machen muß, der wird nach dieser gewonnenen sichern Grundlage dieß Bedürfniß um so leichter befriedigen können. In unsern Volksschulen haben wir noch nicht die besondern, sondern nur die allgemeinen Bildungszwecke zu berücksichtigen. Anstatt mithin den Rechenunterricht hier noch weiter nach aussen auszudehnen, strebe nur jeder Lehrer dahin, nach innen desto mehr für denselben zu leisten, und hege die erhebende Ueberzeugung, daß man die Selbstkraft seiner Schüler weit vollkommener zu entfalten vermöge, wenn man den Lehrstoff weise beschränkt, als wenn man ihn immer weiter auszudehnen sucht.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Stephani, Heinrich,

Ausführliche Anweisung zum Rechenunterrichte in Volksschulen nach der bildenden Methode ... Kursus

Bd.: 2

Nürnberg 1817

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.2328(2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11111082-1